Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Пермская государственная сельскохозяйственная академия
имени академика Д.Н. Прянишникова

В.В. Аюпов

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Пермь 2015

УДК 681
ББК 32
А-11

Рецензенты:
А.Ф. Кошурников, кандидат технических наук, профессор кафедры сельскохозяйственных машин ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА имени академика Д.Н. Прянишникова;
В.Н. Иванов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Высшей математики Пермского государственного национального исследовательского университета.

Аюпов, В.В. Лабораторный практикум по компьютерной математике / В.В. Аюпов; ФБГОУ ВПО Пермская ГСХА. – Пермь: Изд-во ФБГОУ ВПО Пермская ГСХА, 2014. – 60 с.

В пособии представлены необходимые данные универсальной компьютерной системы «Mathematica», позволяющие выполнить задания 16 лабораторных занятий, охватывающих основные темы вузовского курса высшей математики – линейная алгебра, элементы векторного и матричного исчисления, математический анализ и дифференциальные уравнения. Пособие предназначено для студентов направления 35.03.06. - «Агроинженерия» очной и заочной форм обучения инженерного факультета Пермской ГСХА, обучающихся по дисциплине «Прикладная математика на ПЭВМ» и может оказаться полезным также для студентов, обучающихся по направлению 20.03.01 - «Техносферная безопасность», магистрантов и аспирантов при решении расчетных задач, связанных с компьютерным моделированием технических систем и процессов.

Печатается по решению методической комиссии инженерного факультета Пермской ГСХА (протокол № 4 от 2 декабря2014 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение…………………………………………………………………..…4
1. Теоретические основы работы в системе Mathematica………..……...5
1.1. Введение в компьютерную систему Mathematica………………...…5
1.2. Структура системы Mathematica..………………… ……..……………7
1.3. Структура рабочего документа..………….. ..……………………...……7
1.4. Интерфейс системы Mathematica …………. ……………..…...............8
1.5. Основные классы данных………………... ..……….…….…….…...11
1.6. Объекты и идентификаторы ...…………………………………….....12
1.7. Функции, опции и атрибуты…………………………………..…........12
1.8. Арифметические функции и выражения……………………….........13
1.9. Работа со списками..……………………………..…..………...…14
1.10. Операции линейной алгебры..…………………………..…............17
1.11. Решение уравнений и систем уравнений ….. …...………….................19
1.12. Операции математического анализа..…………………... ………..…22
1.13. Графика ……… ……………………………...……….……...…..25
1.14. Решение дифференциальных уравнений .. …………………………30
1.15. Решение оптимизационных задач . … ……..…….……………..…...33
1.16. Элементы программирования ………………………..……………....35
1.17. Пакеты математических расширений ………………..……………36
2. Лабораторные работы……………………………..…………….…...38
2.1. Лабораторная работа 1Ознакомление с системойMathematica.....38
2.2. Лабораторная работа 2Работа со списками ..……..…………..…...40
2.3. Лабораторная работа 3Решение уравнений и систем уравнений...41
2.4. Лабораторная работа 4Работа с векторами и матрицами. ……...…42
2.5. Лабораторная работа 5Операции математического анализа….......43
2.6. Лабораторная работа 6Интегрирование функций ..……………......44
2.7. Лабораторная работа 7Построение графиков функций ..………....45
2.8. Лабораторная работа 8 Работа с графическими объектами 46
2.9. Лабораторная работа 9Решение дифференциальных уравнений…47
2.10. Лабораторная работа 10Решение оптимизационных задач …...…...48
2.11. Лабораторная работа 11Моделирование полета частицы…………..49
2.12. Лабораторная работа 12Составление простейших программ……...50
2.13. Лабораторная работа 13 Разложение функций в рядМаклорена…...51
2.14. Лабораторная работа 14Разложение функций в ряд Фурье... 52
2.15. Лабораторная работа 15Анимация ……………….......................53
2.16. Лабораторная работа 16 Стандартные пакеты расширения…..........54
3. Контрольные задания……………………….……………………....59
Список рекомендованнойлитературы…………………………..……...60

ВВЕДЕНИЕ

В историческом процессе развития вычислительной техники создание электронных вычислительных машин (ЭВМ), программируемых калькуляторов и персональных компьютеров (ПК) разных классов предназначалось для конкретных и практически полезных математических расчетов и вычислений. **Computer** – переводится с английского языка как "вычислитель". Для таких вычислений сейчас в основном используются персональные компьютеры с наборами математических программ на различных языках программирования. Развитию возможностей вычислительной техники способствовало появление специальных программных средств для численных и аналитических расчетов, таких как **Eureka**, **MATLAB**, **Maple** и других.

В наши дни бурное развитие получили системы компьютерной математики (СКМ) для ПК. Они интегрируют в себе современный интерфейс пользователя, решатели математических задач, как численных, так и аналитических, и мощные средства графики. Такие системы стали называть универсальными СКМ – УСКМ. Уже имеется целое поколение таких систем, одной из первых среди которых стал язык программирования символьных вычислений **REDUCE**. Затем появились системы **Mathcad** и **Mathematica**.

Целью данного учебного пособия является изучение и освоение студентами УСКМ **Mathematica-5.1** и применение приобретенных знаний для решения задач курса высшей математики. **Mathematica-5.1**(и все ее предыдущие и последующие версии) создана фирмой WolframResearch во главе с ее президентом и главным разработчиком программ Стивеном Вольфрамом.

В дальнейшем, ссылаясь на систему **Mathematica-5.1**, мы будем говорить **Mathematica**. Данная система совместима с любым современным компьютером, работающим под управлением операционной системы **Windows**. При этом большинство команд и функций системы**Mathematica** не зависят от типа компьютера.

Учебное пособие предназначено для студентов инженерных специальностей Пермской ГСХА, изучающих дисциплину «Прикладная математика на ПЭВМ». В пособии дается краткое описание универсальной системы компьютерной математики **Mathematica**, а также лабораторный практикум, состоящий из заданий, выполняемых одновременно всеми студентами группы и заданий для индивидуальной самостоятельной работы. Задания лабораторных работ охватывают в основном все разделы стандартного курса высшей математики. Учебное пособие может быть полезно для всех желающих самостоятельно изучить систему **Mathematica** и с ее помощью решать различные математические задачи.

1. Теоретические основы работы в системе Mathematica

1.1. Введение в компьютерную систему Mathematica

Система **Mathematica** является профессиональной по своим возможностям. При этом она открыта и для неопытных пользователей. Пользовательский интерфейс системы **Mathematica** (совокупность средств для управления системой с помощью клавиатуры и мыши) таков, что пользователь, имеющий элементарные навыки работы с **Windows**-приложениями, может сразу начать работу в системе Mathematica.

Работа в **Mathematica** происходит в режиме сессии (**session**). Сессия — это вся работа с **Mathematica** в промежутке времени от вхождения в программу **Mathematica** до выхода из нее. Во время сессии можно работать с одним документом или попеременно с несколькими; при этом окна всех документов присутствуют на экране, но активным является только одно из них. Решение любой задачи с помощью **Mathematica** начинается с того, что нужно набрать с клавиатуры выражение, содержащее символы, числа, строки. После набора выражения следует запустить его вычисление нажатием клавиш **Shift** + **Enter** или **Enter** на цифровой клавиатуре справа. Если выражение набрано без ошибок Mathematica вычислит его, и последует вывод; если же в выражении есть синтаксические ошибки, **Mathematica** выдаст сообщение о них, которое поможет вам их исправить. Одна из составляющих успеха в работе с **Mathematica** — научиться безошибочно (в соответствии с правилами синтаксиса) составлять выражения. Этому может помочь справочная система **Help** и панели кнопочного набора (палитры - **Palettes**), которые значительно облегчат процесс набора. Допустим, что вы правильно набрали выражение, и **Mathematica** вычислила его. Тогда одновременно с появлением ответа набранное выражение будет помечено ремаркой **In**[1] —, а появившийся ответ — ремаркой **Out**[1]—; это входная и выходная ячейки. Под выходной ячейкой имеется горизонтальная черта, ниже которой ничего нет. Это означает, что **Mathematica** готова принять новое выражение. Как только вы начнёте печатать первый знак, горизонтальная черта исчезнет, а ваше новое выражение будет располагаться ниже исчезнувшей черты. После вычисления этого выражения вместе с ответом на него возникнут пометки **In**[2]—, **Out**[2] — и новая горизонтальная черта и т.д. Ячейки ввода и вывода помечаются справа отдельными квадратными скобками с треугольничками в верхней части (в скобке ячейки вывода есть ещё дополнительная горизонтальная чёрточка), а вместе они ограничены в правой части экрана общей квадратной скобкой; таким образом, сформирована группа ячеек. В группу могут входить также ячейки третьего типа — текстовые, их используют для заголовков и различного рода комментариев. Свойства входной и выходной ячеек различаются. Во входную ячейку легко помещается курсор, что позволяет как угодно редактировать ее стандартным образом. Чтобы поместить курсор в выходную ячейку (например, для того чтобы скопировать содержимое), предварительно нужно перевести ее во входной формат.Для этого выделяем выходную ячейку (щелчком мыши, подводя её указатель к скобке выходной ячейки), затем входим в меню **Format** и выбираем опцию **Style**, а в ней, переходя вправо к иконке, содержащей список форматов, — стиль **Input**. Скобка, окаймляющая группу ячеек, используется для того, чтобы свернуть (сделать невидимым) содержимое выходной ячейки. Для этого подводят справа к внешней скобке указатель мыши до того момента, когда он примет вид стрелки, направленной влево и ограниченной у острия вертикальным отрезком. После двукратного щелчка левой кнопкой мыши выходная ячейка и горизонтальная черта исчезают. Вы не сможете продолжать вычисления, пока не восстановите горизонтальную линию, расположив указатель мыши ниже измененной ячейки и щелкнув левой кнопкой. Развернуть содержимое спрятанной выходной ячейки можно тем же приёмом. Результаты работы можно сохранить в виде файлов с расширением .**nb**. Для этого выбираем в меню **File** (файл) опцию **Save As** (сохранить как), в появившемся диалоговом окне в строке **"Имя файла**" впечатываем его имя (например, **std**) и нажимаем кнопку "**Сохранить**"; сохранённый файл будет называться **std.nb**.

1.2. Структура системыMathematica

Общая структура системы **Mathematica** представлена на рисунке.

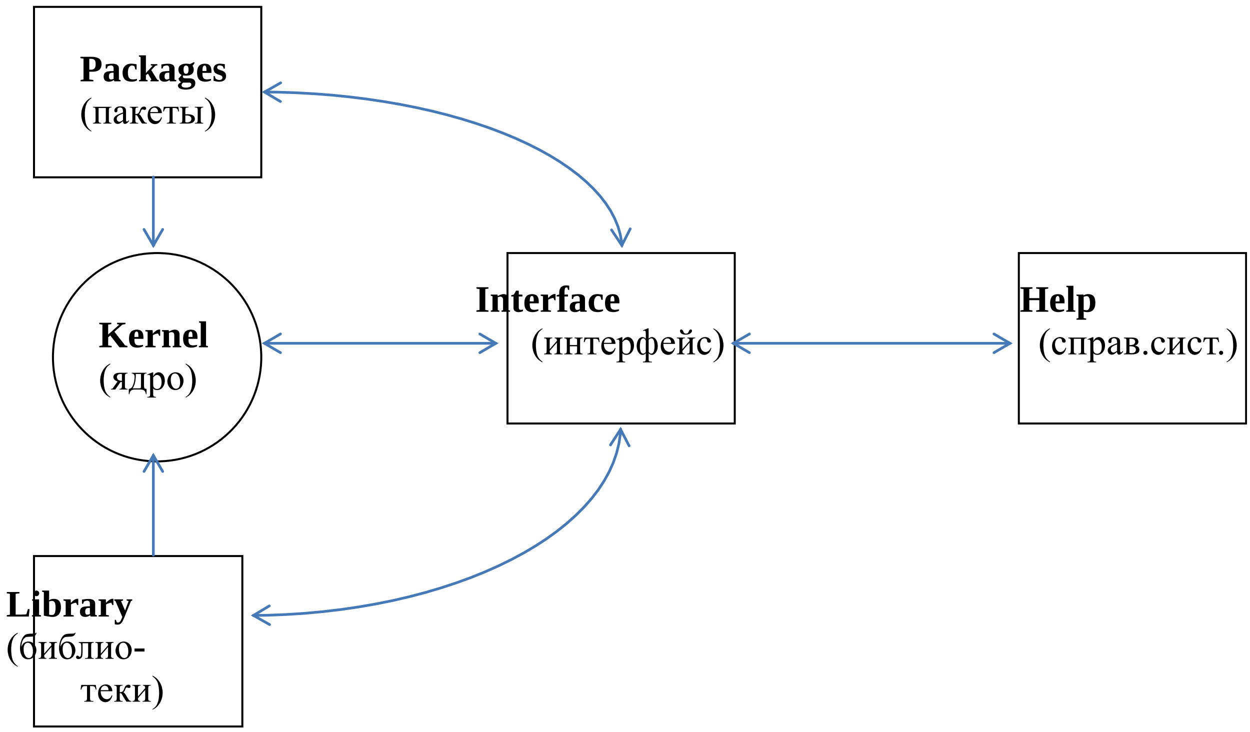


Рисунок. Блок-схема структуры **Mathematica.**

Центральное место в системе **Mathematica** занимает машинно-независимое ядро – **Kernel**. Для адаптации системы к конкретной ЭВМ служит интерфейс (операционные системы класса **Windows**). Библиотека служит для расширения набора функций. Той же цели служат наборы пакетов. Кроме того, имеется встроенная электронная справочная система – **Help**.

1.3. Структура рабочего документа

Интерфейс системы **Mathematica** основан на концепции <u>рабочего поля</u>, или окна документа, содержащего строки ввода, вывода, текст и графику. Подготавливаемый документ имеет расширение **.nb** и называется блокнотом (**<u>Notebook</u>**). Блокноты системы **Mathematica** состоят из ячеек (**<u>Cell</u>**), выделенных по правому краю окна документа закрывающей квадратной скобкой, вид которой указывает на тип ячейки: ячейка ввода (**<u>Input</u>**) – то, что вы печатаете, и ячейка вывода (**<u>Output</u>**) – то, что печатает в ответ **Mathematica**. Ячейки подчинены определенной иерархии –

отдельные ячейки могут быть объединены справа более крупными скобками. При необходимости блок ячеек может быть свернут или развернут.

1.4. Интерфейс системы Mathematica

Строка **меню**

Главное меню системы **Mathematica** содержит следующие позиции:

File – работа с файлами;**Edit** – редактирование файлов;**Cell** – работа с ячейками;**Format** – управление форматом документа;**Input** – задание элементов ввода;**Kernel**– управление ядром системы;**Find** – поиск данных;**Windows** – операции с окнами и их расположением;**Help** – управление справочной системой.

Палитры математических операторов ифункций

Инструментальные палитры со множеством пиктограмм ввода математических символов, функций и команд управления системой вводятся с помощью меню **File** | **Palettes**. Все палитры нет необходимости выводить, так как они едва уместятся в главном окне системы.

Палитры, предназначенные для ввода математических знаков, намного упрощают работу по подготовке документов. Общее число математических знаков, которые можно ввести с помощью палитр – около 700. Многие функции и знаки можно ввести при помощи комбинации клавиш – их можно найти в справочной базе данных системы.

Документ в форме **Notebooks**

Все записи производятся в документе, который называется notebook - записная книжка или блокнот.

Надписи вводятся прямо в строки ввода, затем форматируются с использованием текстового формата подходящего стиля. Для этого выделяется строка ввода с текстовой надписью. Затем выполняется команда меню **Format**| **Style** | **Text**.

Меню**File**

New[Ctrl+N] – создать новый файл; **Open** [Ctrl+O] – открыть существующий файл; **Close** [Ctrl+F4] – закрыть текущий файл; **Save** [Ctrl+S] – сохранить текущий документ с тем же именем;

SaveAs[Sift+Ctrl+S] –сохранитькак…; **Palettes** – вывод палитр математических знаков; **Notebook** – список 5-ти последних файлов, с которыми работал пользователь; **Exit**– выход.

Редактирование документа

Меню **Edit**

Undo[Ctrl+Z] – отменить операцию; **Cut**[Ctrl+X] – перенос содержимого ячейки в буфер; **Copy**[Ctrl+C] – копирование содержимого ячейки в буфер;

Paste[Ctrl+V] – вставка из буфера в указанное курсором место; **Clear**[**Delete**] – очистить (удалить) выделенный фрагмент без сохранения в буфере;
SelectAll[Ctrl+A] – выделение всех ячеек файла.

Операции с **буфером** обмена

Буфер обмена, или просто буфер, - это специально организованная динамическая область памяти, в которую можно помещать информацию различного формата, например, текстовую или графическую.

Буфер используется как для редактирования, так и для обмена информацией между различными приложениями.

Работа с **ячейками**

Меню **Cell**

Ячейка (**Cell**) – является основным объектом документа. Ячейки различаются статусом (ввод, вывод, заблокированные и разблокированные для изменений и т.д.). Статус (тип) ячейки отмечается правой квадратной скобкой, наделенной различными спецификаторами.

ConvertTo – преобразование формата ячейки;

DisplayAs – установка формата отображения ячейки;

DefaultInputFormatType – установка формата по умолчанию для ячеек ввода;

DefaultOutputFormatType – установка формата по умолчанию для ячеек вывода;

Cell Properties – свойстваячейки;

Cell Grouping – группировкаячеек;

MergeCell – объединить ячейки;

DivideCell – разделить сгруппированные ячейки;

MakeStandardSize – установка стандартного размера ячейки;

CellSizeStatistics – статистика о размерах ячеек.

Операции **форматирования** ячеек.

Меню **Format**

Style – выбрать стиль выделенной ячейки;

ScreenStyleEnvironment – стилевая среда экрана;

StyleSheet – лист стилей;

Font – шрифт;

Face– начертания и насыщенность шрифтов;

Size– размер шрифта;

TextColor – назначить цвет литер в выделенном фрагменте;

Magnification – увеличить масштаб документа на экране.

Ввод элементов документа

Меню **Input**

Для ввода некоторых данных служит команда основного меню **Input**, подробное описание которой можно посмотреть в справочной системе **Help**.

Управление работой **ядра**

Меню **Kernel.**

Evaluation – вычисления;

EvaluationCell [Sift+Enter]– вычислитьвыделеннуюячейку;

EvaluationNotebook – вычислить все вычислимые ячейки документа;

InterruptEvaluation – прервать вычисления;

AbortEvaluation – сброс вычислений.

Операции **поиска** и **замены**

Меню **Find**

Find – команда поиска и замены (более подробно см. в **Help**).

Работа с **окнами**

Меню **Window**

Меню **Window** управляет расположением окон (каскадное расположение (стек), мозаика по ширине, мозаика по высоте).

Справочная база данных

Меню **Help**

Меню **Help** предоставляет возможность поиска информации и содержит множество примеров.

1.5. Основные классы данных

К основным классам данных относятся числовыеданныеи константы, символьныеданные, списки.

К числовым данным относятся: двоичные числа, десятичные числа и числовые константы. Десятичные числа представлены целыми (**Integer**), рациональными (**Rational**), действительными (**Real**)и комплексными (**Complex**) числами.Примеры представлений чисел:1) 27 – целое число, 2) 1⁄3 – рациональное, 3) 3.29745 – действительное, 4) 8+i 6 – комплексное.К константам в системе **Mathematica**отнесены:**Pi**– число **π**, имеющее значение 3,141593…,
E– число **e**=2.71828… – основание натурального логарифма, **Degree** – число радиан в одном градусе, равное $\frac{\pi}{180}$,**GoldenRatio** – константа, равная $(1+\sqrt{5})/2$, определяющая деление отрезка по правилу золотого сечения,**I** – мнимая единица, равная $i=\sqrt{-1}$,**Infinity** – бесконечность ∞ и другие.

Символьные данные могут быть представлены в виде одного или нескольких идущих подряд символов, например, **a**, **b**, **c**, … или **a1**, **bb**, **xyz24**, и т.д. Символьные строки задаются цепочкой символов, заключенных в кавычках, например, "**Mathematica**", "**computer\tsystem\nMathematica**". В последнем примере символы **\t** и **\n** –

являются опциями, первая из которых определяет табуляцию, вторая – новую строку.

Наиболее общим видом сложных данных в системе Математика являются списки (**Lists**). Списки представляют собой совокупности однородных или разнородных данных, сгруппированных с помощью фигурных скобок или с помощью функции **List**[, , …].Примеры списков:{**a,b,c**} –список из трех символьных данных,{**1,2,3**} – список из трех целых чисел,{**a/b,x+y, x**^{2}**, Sin[**x**]**} – список из четырех математических выражений,{2.5,”**abc”, x**^{2}}– список из трех разнотипных данных,{{**a,b**},{**c,d**}}– список, состоящий из двух списков, то есть список, эквивалентный матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.Таким образом, списки могут быть простыми (одноуровневыми) и сложными (многоуровневыми). С помощью списков представляются множественные данные – массивы.

1.6. Объекты и идентификаторы

В общем случае система **Mathematica** оперирует с <u>объектами</u>. Под ними подразумеваются числа, константы, символы, строки, математические выражения, графические и звуковые объекты и другие.Каждый объект характеризуется своим именем – <u>идентификатором</u>. Это имя должно быть уникальным, т.е. единственным.

Правила задания идентификаторов:**ssssss** – имя объекта, заданного пользователем,**Sssss**– имя объекта, входящего в ядро системы,**$Sssss** – имя системного объекта.Здесь **s** –любая буква или цифра. При этом первый символ - всегда буква.

1.7. Функции, опции и атрибуты

<u>Функция</u> – это объект, имеющий имя и список параметров, перечисленных через запятые и заключенных в квадратные скобки.

Формат записи функции:

Имя_функции[**o1**,**o2**,**o3**,…], где **o1**,**o2**,**o3**,… – объекты (параметры, опции, математические выражения и т.д.).

<u>Опция</u> – это параметр функции, задающий дополнительные условия выполнения этой функции. Опция задается так:

Имя_опции ->**Значение _опции**

Значением опции обычно является **слово**.

Например,**Plot**[**Sin**[**x**],{**x,0,20**},**Axes**->**None**].

В этом примере **Axes** – опция, определяющая наличие осей, **None** – ее значение, смысл которого в том, что оси не нужно выводить.Чтобы узнать, какие опции используются в данной функции, нужно выполнить функцию**Options**[**Имя_функции**].

Каждый объект может характеризоваться своими свойствами и признаками, которые называются атрибутами.

Чтобы определить какие атрибуты имеет конкретная функция, например, **Sin**, нужно сформировать функцию-запрос:**Attributes**[**Sin**], на который система выдаст список атрибутов этой функции:

{**Listable**, **NumericFunction**, **Protected**}, которые означают соответственно, что функция **Sin**является дистрибутивной, числовой и что сочетание символов **Sin**защищено от использования в качестве идентификатора.

1.8. Арифметические функции и выражения

К арифметическим относятся следующие функции:

Plus[**a,b**, ...]–сумма $a+b+\cdots$;

Times[**a,b**, ...]–произведение $a \cdot b \cdot \cdots$;

Divide[a,b]– деление a на b;

Power[a,n]– возведение a в степень n;

Sqrt[a] – извлечение из a квадратного корня;

Exp[**x**]– экспонента e^x;

Log[**x**]– натуральный логарифм $\ln x$;

Log[**a, *x***]– логарифм по основанию a от x: $\log_a x$;

n!– функция эн факториал ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$);

Sin[x], Cos[x], Tan[x], Cot[x]–тригонометрические функции $\sin x, \cos x, tgx, ctgx$;

ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x], ArcCot[x]– обратные тригонометрические функции $\arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx$;

Abs[x]–модульх: |x|;

Max[x1,x2, …, xn]– максимальное число из чисел $x1, x2, \cdots, xn$;

Min[x1,x2, …, xn]– минимальное число из чисел $x1, x2, \cdots, xn$;

FactorInteger[n]– разложение целого числа на простые сомножители;

N[expr, n]–вычисление выражения**expr** с точностью до **n**знаков после десятичной точки.

Любое выражение в системе **Mathematica**строится из атомарных выражений по правилу

h[$e_1, e_2, \ldots, e_n$],

где **h** – заголовок выражения, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – элементы выражения. Атомарные выражения могут быть соединены знаками действий.

В системе **Mathematica** выражения подразделяются на арифметические, алгебраические, тригонометрические и смешанные (общего вида) выражения. Следующие записи представляют собой различные выражения:1) **Sin[x]**,2) **Integrate[Cos[x],x]**,3) **2*Log**[**x**]**+3**,

4) **(a+b^2+c^3)/(4*x-3*y)**.

Для простоты выражения будем называть формулами. Таким образом, для записи выражений используются как операторы: +;–;*;/;^ и т.д., круглые скобки, так и функции.При составлении выражений придерживаются следующих соглашений: 1) круглые скобки используются для выделения части выражения и для задания последовательности действий; 2) знак умножения может быть заменен пробелом; 3) встроенные функции начинаются с большой буквы; 4) параметры функции задаются в квадратных скобках.

1.9. Работа со списками

1.9.1. Формирование списков

В системе **Mathematica** имеется 4 функции формирования списков: **List, Table, Range, Array**.

Формат функции **List.**

List[$x_1, x_2, \ldots, x_n$], где x_i – объекты системы **Mathematica**. Например, **List**[**1**, **Cos**[**x**], **List** [**a**, **b**, **c**, **d**]]формирует неоднородный двухуровневый список, **List**[{**1**, **4**, **9**}, {**0**, **1**, **4**}, {**0**, **0**, **1**}]//**MatrixForm**⇒$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ формирует однородный двухуровневый список, который представлен в виде матрицы, **List**[{**1**, **4**, **9**}, {**0**, **1**, **4**}, {**0**, **0**, **1**}]//**TableForm**⇒ $\begin{matrix} 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ тот же список, представленный в виде таблицы.

Форматфункции**Table.**

Table$[f,\{n\}]$–формирует список $\{f,f,\dots,f\}$, состоящий из **n** знаков (выражений) f;

Table$[f[i],\{i,n\}]$–формируетсписок$\{f[1],f[2],\dots\ ,f[n]\}$;

Table$[f[i,j],\{i,n\},\{j,m\}]$–формирует двухуровневый вложенный список и т.д. Например,

Table$[e^i,\{5\}]\Rightarrow\{e^i,e^i,e^i,e^i,e^i\}$;

Table$[e^i,\{i,5\}]\Rightarrow\{e^1,e^2,e^3,e^4,e^5\}$;

Table $[i*j,\{i,3\},\{j,3\}]\Rightarrow\{\{1,2,3\},\{2,4,6\},\{3,6,9\}\}$.

Формат функции **Range**.

Range$[i_{min},i_{max},d_i]$ – формирует список из целых чисел от i_{min}доi_{max}с шагомd_i. Например, **Range**$[2,12,3]\Rightarrow\{2,5,8,11\}$.

Если i_{min}и d_iопущены, то формируется список {**1,2,3,…,**i_{max}}, например,**Range**$[10]\Rightarrow$**{1,2,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}**.

Формат функции **Array**.

1) **Array** $[f, n]\Rightarrow\{f[1],f[2],\dots,f[n]\}$
2) **Array**$[f,\{n_1,n_2\}]\Rightarrow$

$\{\{f[1,1],f[1,2],\dots,f[1,n_2]\},\{f[2,1],f[2,2],\dots,f[2,n_2]\},\dots,\{f[n_1,1],\dots,f[n_1,n_2]\}\}$

1.9.2. Структура и формы представления списков

1) **Length**[s] – длина списка.

Length$[\{1,7,a,Cos[x]\}]\Rightarrow 4$

2) **MatrixForm** [**m**] – матричная форма сложного списка.

m $=\{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\}\}$.

$\mathbf{MatrixForm[m]} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ или $\mathbf{m//MatrixForm} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

3) **TableForm**[**m**] – табличная форма сложного списка.

$\mathbf{TableForm[m]} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$ или $\mathbf{m//\ TableForm} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$.

4) **Dimensions** [**s**] – список размерностей сложного списка**s**.

$\mathbf{Dimensions[m]} \Rightarrow \{3, 3\}$

$\mathbf{Dimensions[\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}]} \Rightarrow \{3, 2\}$

Dimensions$[\{1, 2, 3, 4\}] \Rightarrow \{4\}$– список, размерность списка.

Dimensions$[\{a, a, a\}] \Rightarrow \{3\}$.

Dimensions$[a + a^2 + a^3] \Rightarrow \{3\}$.

1.9.3. Взятие функций от списков

Пусть ***f***– математическая функция или операция, **s**– список. Взятие функций от списка можно оформить тремя способами:

1) ***f*** **[s]**, 2) ***f@*** **s**, 3) **s** // ***f***.

Пример:Пусть$s1 = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}, s2 = \{1, 2, 3\}, s3 = \{4, 5, 6\}$.

Тогда:$\mathbf{Cos[s1]} \Rightarrow \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -1\right\}$,$\mathbf{Cos @ s1} \Rightarrow \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -1\right\}$,

s1 //

$\mathbf{Cos} \Rightarrow \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -1\right\}$;**Plus[s2,s3]**или**s2+s3⇒{5,7,9}**;$\mathbf{e^{s2}} \Rightarrow \{e^1, e^2, e^3\}$;

$\mathbf{s3^2} \Rightarrow \{16, 25, 36\}$.

1.9.4. Функциивыявленияструктурысписков

MemberQ[**s, form**] – принадлежностьэлементаспискуs.Например,

MemberQ[{a, b, c}, c] ⇒**True.**

Position[**s, form**] – номерэлементавспискеs.

Position[{a, b, c}, c] ⇒{{3}}.

Part[s,i] – выборi–гоэлементаспискаs.Например, **Part**[{1, b, x},2] ⇒{b}.

Select[**s, crit**] - выборэлементовспискаsпокритериюcrit.

Select[{1, a, 2, b, 3, c}, **NumberQ**]⇒{1, 2, 3}.

1.9.5. Вывод элементов списка

MatrixForm[s] – выводит список в виде массива (матрицы).

TableForm[s] – выводит список в форме таблицы.

Sort[s] – сортирует список в каноническом порядке по возрастанию: сначала числа, затем буквы в алфавитном порядке.

Transpose[**m**] – транспонирование матрицы $m \to m'$.

Union[s] – сортирует, удаляя повтор списка.

First[s] – первый элемент списка или выражение.

Last[s] – последний элемент списка или выражения.

Delete[**s, i**] – удалить **i**–й элемент списка **s**.

ReplacePart[**s, x, i**] –**i**–й элемент списка **s** заменяется на **x**.

Sort[s, **Greater**] – сортирует список в порядке убывания.

Insert[**s, x, i**] – на**i**–еместо в списке вставляет **x**.

1.10. Операции линейной алгебры

1.10.1.Векторы, матрицы и действия над ними

Векторы в системе **Mathematica** задаются как одноуровневые списки. Матрицы – как двухуровневые списки. Чтобы выделить (i, j) - йэлемент матрицы$m = \{\{m_{11}, m_{12}, m_{13}\}, \{m_{21}, m_{22}, m_{23}\}, \{m_{31}, m_{32}, m_{33}\}\}$, нужно задать m [[i, j]]. При этом выделится элемент матрицы **m** с индексами **i, j**.

Аналогично выделяется **i**–ястрока матрицы **m**:задаетсяm [[**i**]]. Действия с векторами и матрицами определяются следующим образом:

c * v – умножение вектора **v**на скаляр **c**;

c * m – умножение матрицы **m** на число **c**;

v . u или **Dot**[**v, u**] – скалярное произведение векторов;

v . m– произведение вектора на матрицу,

m . v – произведение матрицы на вектор,

$\mathbf{m_1 . m_2}$– произведение двух матриц;

v×**u** или **Cross**[**v, u**] – векторное произведение двух векторов.

1.10.2. Формирование матриц и вычисление функций от матриц

Следующие функции относятся к функциям, формирующим матрицы.**IdentityMatrix**[**n**] –$\mathbf{E_n}$–формирует единичную матрицу**n**–го порядка, например:**IdentityMatrix**[**3**] $\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$;

DiagonalMatrix[{$\boldsymbol{d_1, d_2, \ldots, d_n}$**}**]– формируетдиагональнуюматрицу**n**–гопорядка, например**DiagonalMatrix**[**{**$\boldsymbol{d_1, d_2}$**}**] $\Rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{d_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{d_2} \end{pmatrix}$;

Inverse[**m**] ⇒$\mathbf{m}^{-1}$–формирование обратной матрицы $\mathbf{m}^{-1}$поотношению к матрице **m**;

Det[**m**] – вычисляет определитель квадратной матрицы **m**;

Minors[**m, k**] – выдаёт список миноров **k** –го порядка матрицы **m**;

MatrixPower[**m, n**] – вычисление **n**–й степени квадратной матрицы **m**.

1.11. Решение уравнений и систем уравнений

1.11.1. Решение нелинейных уравнений и систем уравнений

Многие математические задачи сводятся к решению одного уравнения или системы уравнений. В общем случае решаемые уравнения и системы – нелинейны. Для решения уравнений как одиночных, так и систем в численном и символьном виде в системе**Mathematica** имеются следующие основные функции:**Solve, NSolve, Reduce, Roots, FindRoot.** Функция **Solve**служит для точного решения уравнений.

Формат функции **Solve[уравнение, неизвестное]** – для решения одного уравнения и **Solve[{система уравнений}, {список неизвестных}] –** для систем уравнений.

Примеры: Решить уравнение:x^2– 5 x +4 = 0. Решение: x_1=1, x_2=4.

Решение в системе**Mathematica**:**Solve**[**x^2–5x+4==0, x**] ⇒{{**x→ 1**},{**x→ 4**}}

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x+y=0 \end{cases}$.Решение: x =–1, y = 1.

Решение в системе**Mathematica**:**Solve** [{**2 x + 3y == 1, x + y == 0**}, {**x, y**}] ⇒ {{**x → −1**}, {**y → 1**}}

Функция **NSolve**служит для приближенного решения уравнений.

Формат функции **NSolve[уравнение, неизвестное] –** для решения одного уравнения и **NSolve[{система уравнений}, {список неизвестных}] –** для систем уравнений.

Примеры: Решить уравнение:x^3–x + 1 = 0.Решение: x_1= – 1,3247;x_2=0,6623 – 0,5622 *i*; x_2= 0,6623 + 0,5622 *i*.

Решение в системе**Mathematica**:**NSolve** [**x^3– x + 1 = = 0, x**] ⇒

{{**x**→ - **1.3247**}, {**x** → **0.6623 - 0.5622 I**}, {**x** → **0.6623 + 0.5622 I**}}

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x+3y=\sqrt{2} \end{cases}$. Решение:x= –2,2071; y = 1, 2071.

Решение в системе**Mathematica**:**NSolve**[{**x+y+1 == 0, x+3y==** $\sqrt{2}$ **}, {x, y}**] ⇒ **{ {x** → **-2.20711}, {y** → **1.20711} }**

Функция **Reduce**служит для решения уравнений с параметрами (с учетом их особых значений). Формат функции **Reduce [уравнение, неизвестное]** – для решения одного уравнения и **Reduce [{система уравнений}, {список неизвестных}]** – для систем уравнений.

Решить уравнение: $ax^3 + bx = 0$.Решение: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\,i$; $x_2 = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\,i$, $a \neq 0$.

Решениевсистеме**Mathematica**:**Reduce[a * x^3 + b * x == 0, x**] ⇒

$$\mathbf{b == 0 \;\&\& a == 0 \;||\; a \neq 0 \;\&\& \left(x == -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\,I \;||\; x == +\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\,I\right) \;||\; x==0}$$

Функция **Roots**служит для поиска корней уравнения. Формат функции

Roots[уравнение, неизвестное] – для решения одного уравнения и

Roots[{система уравнений}, {список неизвестных}] – для систем уравнений.

Решить уравнение: x^2– 5 x + 4 = 0. Решение: x_1=1, x_2=4.

Решение в системе**Mathematica**:**Roots[x^2–5x+4==0, x] ⇒x== 1 || x ==4**

Решить систему уравнений: $\begin{cases} \mathbf{2x+3y=1} \\ \mathbf{x+y=0} \end{cases}$.Решение: x =–1, y = 1.

Решение в системе**Mathematica**:**Root** [**{2 x + 3y == 1, x + y == 0}, {x, y}] ⇒ x == –1 || y == 1**

Функция **FindRoot**служит для нахождения одного приближенного корня уравнения. Формат функции: **FindRoot[уравнение, {x, x0}]**,где**x** – неизвестное,**x0 –** ближайшее приближенное значение неизвестного.

Найти корень уравнения: $\sin(x) = x^2$, ближайший к значению x0 = 0,9.

Решение: x ≈ 0,876726.

Решение в системе**Mathematica**:**FindRoot** [**Sin**[x] == $\mathbf{x^2}$, **{x, 0.9}]** ⇒ {x→ **0.876726**}.

1.11.2. Решение систем линейных уравнений

1) **LinearSolve**[**m,b**] – выдаёт вектор $\mathbf{x^0} \Rightarrow \{\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \ldots, \mathbf{x}_n^0\}$, являющийся решением матричного уравнения **m.x = b** (**m** –квадратная матрица**n**– го порядка системы **n**линейных уравнений с **n**неизвестными,**b**- матрица-столбец правых частей системы уравнений).
2) **RowReduce**[$\mathbf{m_1}$] – решить систему методом Гаусса, где$\mathbf{m_1} = (\mathbf{m}|\mathbf{b})$– расширенная матрица системы. Для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными решение выглядит так: $\mathbf{x^0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{x}_1^0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{x}_2^0 \end{pmatrix}$.
3) **Solve[**{список уравнений},{список неизвестных}**]** – решить систему**n**линейных уравнений с **n**неизвестными (см. функцию **Solve**, рассмотренную в п 1). Для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными решение выглядит так: $\mathbf{x^0} \Rightarrow \{\{\mathbf{x1} \to \mathbf{x}_1^0\}, \{\mathbf{x2} \to \mathbf{x}_2^0\}\}$.
4) Пример: решить в **Mathematica**систему двух уравнений с двумя неизвестными$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$ (решение: $x_1 = 1, x_2 = -1$) с помощью рассмотренных выше функций.

   1) $m = \{\{1,-2\},\{2,3\}\}$; $b = \{3,-1\}$; **LinearSolve**[**m,b**] ⇒{**1**, **−1**};

$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{RowReduce}[\mathbf{m_1}] \Rightarrow$

2) $\{\{\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$;

3) **Solve**$[\{\mathbf{x1} - \mathbf{2x2} == \mathbf{3}, \mathbf{2x1} + \mathbf{3x2} = -\mathbf{1}\}, \{\mathbf{x1}, \mathbf{x2}\}] \Rightarrow$

$\{\{\mathbf{x1} \to \mathbf{1}\}, \{\mathbf{x2} \to -\mathbf{1}\}\}$.

1.12. Операции математического анализа

1.12.1. Вычисление пределов

Формат функции взятия предела от функции $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}$ $(\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}))$

$\mathbf{Limit}[$выражение, $\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}]$.

Например, $\mathbf{Limit}\left[\frac{\mathbf{Sin[x]}}{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \to \mathbf{0}\right] \Rightarrow \{\mathbf{1}\}$

Функция **Limit** в качестве необязательных аргументов допускает две опции: **Direction** → **Automatic** (или -1 (*предел справа*), или +1(*предел слева*)) и **Analytic** → **False** (или **True**) задаёт режим обработки функций, из которых составлено выражение. В случае **True** функции раскладываются в ряд Тейлора. Если в системе **Mathematica** невозможно вычислить предел, то возвращается невычисленное выражение.

$\mathbf{Limit}\left[\mathbf{ArcTan}\left[\frac{1}{x}\right], x \to -0, \mathbf{Direction} \to +1\right] \Rightarrow -\frac{\pi}{2};$

$\mathbf{Limit}\left[\mathbf{ArcTan}\left[\frac{1}{x}\right], x \to -0\right] \Rightarrow \frac{\pi}{2};$

1.12.2. Дифференцирование функций

Операции дифференцирования в системе **Mathematica**осуществляют две функции:

D – частного дифференцирования и **Dt** - полного дифференцирования.

$\mathbf{D}[f[\mathbf{x}],\mathbf{x}]$ – частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$; или $\partial_x f[\mathbf{x}]$**;**

$\mathbf{D}[f[\mathbf{x}],\{\mathbf{x},\mathbf{n}\}]$ – частная производная **n** – го порядка $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$;

$\mathbf{D}[f[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots],\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots]$ – смешанная частная производная $\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\ldots f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;

$\mathbf{Dt}[f]$– полный дифференциал ∂f;

$\mathbf{Dt}[f,\mathbf{x}]$– полная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$;

$\mathbf{Dt}[f,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\ldots]$– смешанная полная производная $\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\ldots f$.

$\mathbf{Dt}[f,\{\mathbf{x},\mathbf{n}\}]$– полная производная **n** – го порядка. Вместо $\mathbf{Dt}[f,\mathbf{x}]$ и $\mathbf{Dt}[f,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\ldots]$ можно использовать шаблоны $\partial_\square\square$ и $\partial_{\square,\square}\square$ на палитре **BASICINPUT**.

Найти, например, производные:

$\mathbf{D}\left[\sqrt{x},x\right]$или $\partial_x\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\mathbf{D}[x^2-3x+5,x]$или$\partial_x(x^2-3x+5) \Rightarrow 2x-3$

Найти частные производные:$\mathbf{D}[x^2+2xy+y^2,x]$или $\partial_x(x^2+2xy+y^2) \Rightarrow 2x+2y$

Смешанные частные производные:$\mathbf{D}[x^2-3xy^2+y^3,x,y]$ или

$\partial_{x,y}(x^2-3xy^2+y^3) \Rightarrow -6y$

Полный дифференциал 1−го порядка: $\mathbf{Dt}[x^2+6xy+4y^2] \Rightarrow$

$2x * Dt[x] + 6y * Dt[x] + 6x * Dt[y] + 8y * Dt[y]$

$(\,\partial(x^2 + 6xy + 4y^2) = 2x\partial x + 6y\partial x + 6x\partial y + 8y\partial y\,);$

Найти дифференциал от функции $\sin x$:

$Dt[Sin[x]] \Rightarrow Cos[x] * Dt[x]$.

1.12.3. Вычисление интегралов

$\int f(x)dx = F(x) + C$–неопределенный интеграл.

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$–определенный интеграл.

Integrate[*f*, **x**] или $\int f[x]dx$ – вычисление неопределенного интеграла в системе **Mathematica**. Следует иметь в виду, что при этом выдается лишь первообразная (в ответе отсутствует произвольная константа **C**).

Integrate[*f*, {**x**, **a**, **b**}] – вычислениеопределенного интегралавсистеме **Mathematica**.

Integrate[*f*, {**x**, **a**, **b**}, {**y**, **c**, **d**}, ...]– кратный интеграл от функции *f*двух переменных x иy.

Integrate[{$f_1, f_2, \ldots, f_n$}, {**x**, **a**, **b**}]– определенный интеграл от нескольких функций.

$\int_a^b f_1 dx;\ \int_a^b f_2 dx; \ldots\ \int_a^b f_n dx$;**a** и **b** могут быть равными - ∞ или +∞.

Примеры вычисления неопределенных интегралов:

1) $\int x^2 dx \Rightarrow \frac{x^3}{3}$; 2) **Integrate**[**Sin**[**x**], **x**] ⇒ −**Cos**[**x**].

Численное интегрирование в системе **Mathematica**осуществляется с помощью функции **NIntegrate**, имеющей формат**Integrate**[$f[x], \{x, x_0, x_k\}$].

Пример:**NIntegrate**[$\sqrt{2x+1}, \{x, 0, 1\}$] ⇒ 1.3987.

Функция **NIntegrate** имеет ряд опций, о которых можно узнать с помощьюфункцию**Options**[**NIntegrate**]или обратившись к системе **Help**.

1.13. Графика

ВсистемеMathematicaимеетсядесятьвстроенныхфункций: **Plot**,**ListPlot**,**ParametricPlot**,**ContourPlot**,**ListContourPlot**,**DensityPlot**,**ListDensityPlot**,**Plot3D**,**ListPlot3D**,**ParametricPlot3D**, предназначенных для построения графиков. Три из них, названия которых оканчиваются на **3D**, строят изображения графических объектов в трёхмерном пространстве, остальные дают графические объекты на плоскости.

1.13.1. Графические функции двумерной графики и их опции

Графическая функция **Plot**.

1 й формат: **Plot**[f[x], {x, a, b}, список опций]–печать графика одной функции. Например, функция**Plot**[*Sin*[x], {x, 0, 2π}] строит график функции *Sin*[x] на периоде [0, 2**π**].

Можно графики именовать:

Например,**g** = **Plot**[Sin[x], {x, 0, 2π}] – задает графический объект **g**.

2й формат: **Plot**[{f_1[x], f_2[x], ..., f_n[x]}, {x, a, b}, список опций]– печать нескольких графиков, заданных на промежутке [**a**,**b**].

Пример: Построить 3 синусоиды **Sin x**, **Sin2x**, **Sin3x**на промежутке [0, 2**π**].

Решение:**Plot**[{Sin[x], Sin[2x], Sin[3x]}, {x, 0, 2π}]

Опции функции **Plot**

Для вывода списка опций функции **Plot** можно использовать команду **Options**[Plot].

Символические значения опций:

Automatic– используется автоматический выбор;

None – опция не используется;

All– используется в любом случае;

True – используется;

False – не используется.

Наиболее часто используемыми опциями при изображении графических объектов являютя:

PlotRange→ $\{y_{min}, y_{max}\}$ – установка масштаба по вертикали;

AxesLabel →{"x", "y"}– надписи осей координат;

PlotLabel→ "Текст"– название графика;

PlotPoints → n – количество точек изображающий график;

PlotStyle →{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.015], ...};

AspectRatio → значение – задаёт отношение высоты изображения к его длине (по умолчанию значение ≈ 1.62…);

Axes– режим вывода координатных;

Ticks– разметка по осям координат;

Frame – вывод рамки для графика.

Графическая функция **ListPlot**.

Функция**ListPlot**имеет два формата:

а) **ListPlot**$[\{\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_n}\}]$ –

строит точки$\boldsymbol{M_1(1, y_1)}$; $\boldsymbol{M_2(2, y_2)}$; …; $\boldsymbol{M_n(n, y_n)}$

б) **ListPlot**$[\{\{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}\}, \{\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}\}, \dots, \{\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n}\}\}]$–

строит точки $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1)}$; $\boldsymbol{M_2(x_2, y_2)}$; … ; $\boldsymbol{M_n(x_n, y_n)}$.

Графическая функция **ParametricPlot**.

ParametricPlot$[\{f, \mathbf{g}\}, \{\mathbf{t}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}]$– строит график кривой, заданной параметрически: $\begin{cases} \mathbf{x} = f(\mathbf{t}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{t}) \end{cases}$, $\mathrm{t} \in [a, b]$.

ParametricPlot$[\{f_1, \mathbf{g_1}\}, \{f_2, \mathbf{g_2}\}, \dots, \{f_n, \mathbf{g_n}\}, \{\mathbf{t}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}]$ - построение нескольких кривых, заданных параметрически.

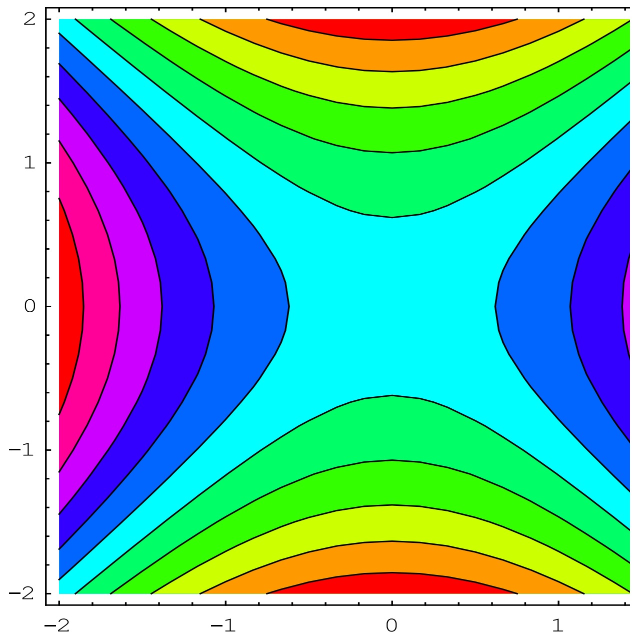
Для изображения кривых в полярной системе координат нужно перейти к параметрическому заданию кривой:

$$\begin{cases} x = r(\varphi) * \cos\varphi; \\ y = r(\varphi) * \sin\varphi, \end{cases} \varphi \in [\varphi 1, \varphi 2].$$

Графическая функция **ContourPlot**.

ContourPlot$[f, \{\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}, \{\mathbf{y}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}]$– изображение линий уровня поверхности z=f(x,y)

Пример:***ContourPlot*** $[\boldsymbol{x^2 - y^2}, \{\boldsymbol{x}, \mathbf{-2}, \mathbf{2}\}, \{\boldsymbol{y}, \mathbf{-2}, \mathbf{2}\}]$



<u>Графическая функция **DensityPlot**.</u>

DensityPlot – построение картин <u>плотности</u>поверхности z = f(x,y).

1.13.2. Видоизменение графиков и их комбинирование

Show[g] - изображение графика по вычисленным данным;

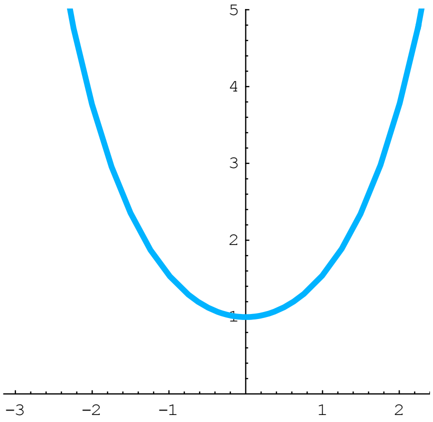
Show[g, option → value]– изображение графика по вычисленнымданным с использованием опций;

Show[g_1, g_2, …, g_n]– изображение **n** графиков;

GraphicsArray[{g_1, g_2, …, g_n}]– представляет ряд вычисленных графических объектовбез их изображения;

Show[GraphicsArray[{g_1, g_2, …, g_n}]]– изображение нескольких графиков на одной горизонтальной линии. Пример:

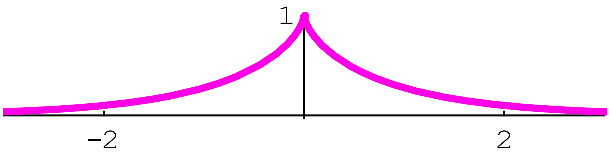
```
g1 = Plot[Cosh[x], {x, −3, 3}, AspectRatio → Automatic, PlotRange
        → {0, 5}, PlotStyle → {Hue[0.55], Thickness[0.012]}]
```



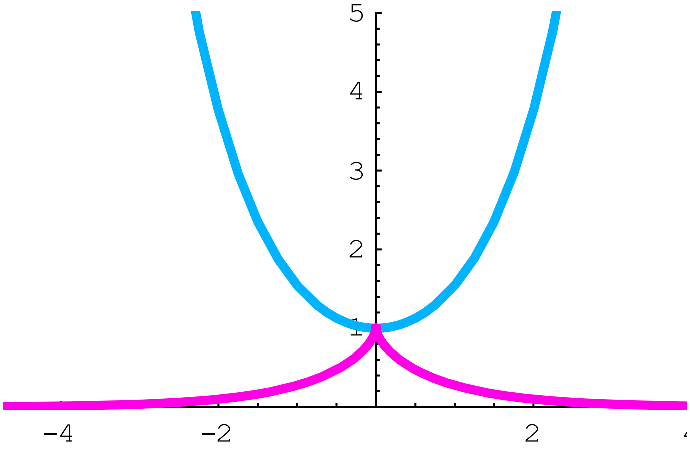
g2=**ParametricPlot[{Cos[t] + Log[Abs[Tan[t/2]]], Sin[t]}, {t, 0,π},**

AspectRatio→Automatic, PlotRange→{{–3,3}, Automatic}, Ticks→{{–2,2},

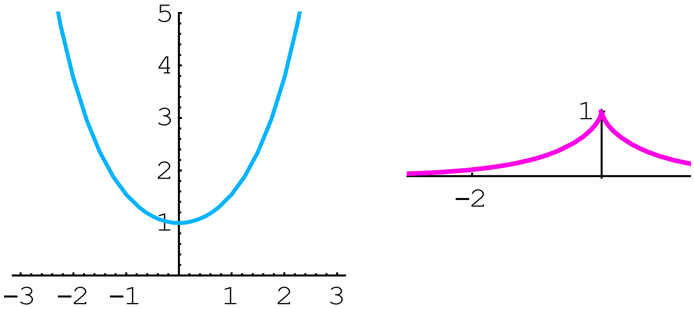
{1}}, PlotStyle→{Hue[0.85], Thickness[0.012]}]



1) **Show**[**g**1,**g**2]⇒



2) **Show**[**GraphicsArray**[{**g**1,**g**2}]]⇒



1.13.3. Графические примитивы

Graphics[$prim, options$]– представляет двумерный графическийобраз.

В этой функции под $prim$ понимаются следующие примитивы:

Circle[{**x**, **y**}, **r**] – окружность с центром $\boldsymbol{C(x,y)}$, радиуса **r**;

Circle[{**x**, **y**}, {**a**, **b**}]– эллипс с центром $\boldsymbol{C(x,y)}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$– полуоси эллипса;

Circle[{**x**, **y**}, **r**{$\boldsymbol{\varphi_1}, \boldsymbol{\varphi_2}$}]– дуга окружности;

Circle[{**x**, **y**}, {**a**, **b**}, {$\boldsymbol{\varphi_1}, \boldsymbol{\varphi_2}$}] – дуга эллипса;

Disk[{**x**, **y**}, **r**] – закрашенная фигура;

Line[{{$\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}$}, {$\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}$}, ... }]– ломаная $M_1, M_2, \dots, M_n$;

Point[{**x**, **y**}]– точка с координатами (**x,y)**;

Polygon[{$\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}$}, {$\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}$}, ...]– многоугольник закрашенный;

Rectangle[{$\mathbf{x_{min}}, \mathbf{x_{max}}$}, {$\mathbf{y_{min}}, \mathbf{y_{max}}$}]– закрашенный прямоугольник;

Text[текст, {**x**, **y**}] – текст, центрированный по точке с координатами (**x,y)**.

1.13.4. Графические директивы

AbsoluteDashing[{$\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}$, ... }]– абсолютный размер штриха;

AbsolutePointSize[**d**] – абсолютный и промежуточный

размерточки;**AbsoluteThickness**[**w**]– абсолютная толщина линии;

PointSize[**d**]– относительный размер точки (по отношению к ширине полного рисунка);

RGBColor[**r**(**Red**), **g**(**Grien**), **b**(**Blue**)]– цвет в **RGB**–гамме;

Thickness[**w**]– относительная толщина линии в дюймах.

1.13.5. Графические функции трехмерной графики

Plot3D – строит поверхность, уравнение которой в декартовой системе координат z = $f(x, y)$.

ParametricPlot3D –изображает пространственную кривую в пространстве.

ListPlot3D - изображение поверхности, заданной массивом чисел.

1.14. Решение дифференциальных уравнений

С помощью системы **Mathematica** можно находить аналитические и численные решения обыкновенных дифференциальных уравнений, а также решения дифференциальных уравнений в частных производных.

1.14.1. Решение дифференциальных уравнений в символьном виде

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений в символьном виде в системе **Mathematica** используются следующие средства:

1) Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка вида: **F(x,y,y',y",…, $y^{(n)}$) = 0**. (1)

Формат решения такого дифференциального уравнения в системе **Mathematica**:**DSolve[**д.у.,**y[x]**,**x]**,

где **д.у.** – дифференциальное уравнение (1), записанное в формате системы **Mathematica**, **y[x]** – искомая функция,**x**– независимая переменная.

2) Если дана система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций**y1[x], y2[x], …, yn[x]**, каждая из которых – функция одной независимой переменной **x**, то формат решения такой системы:**DSolve[{д.у.1, д.у.2, …, д.у.n},{y1[x], y2[x], …, yn[x]}, x],**

где **д.у.*i*** – уравнения системы дифференциальных уравнений, **y*i* [x]** – искомые функции независимой переменной **x** (*i*=1, 2, …, n).

В решении дифференциальных уравнений встречаются *постоянные интегрирования*. По умолчанию они обозначаются как **C[*i*]**.
Пример: найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами **y"–y'– 6y = 0**. Общим решением такого дифференциального уравнения является **y** = $c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$**.** В системе **Mathematica**уравнение решается так:

DSolve[y"[x] –y' [x] – 6y[x] == 0, y[x], x]⇒{{y[x]→e^{-2x}C[1] + e^{3x}C[2]}}

3) Решение задачи Коши для одного дифференциального уравнения относительно неизвестной функции**y[x]**сначальным условием **y[x0]=y0**.Формат решения такой задачи:**DSolve[{д.у., н.у.},y[x], x],**

где **д.у.** – дифференциальное уравнение, **н.у.**–начальное условия, **y[x]** – искомая функция от одной независимой переменной **x**.

4) Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций**y1[x], y2[x], …, yn[x]**имеет формат:**DSolve[{д.у.1, д.у.2, …, д.у.n, н.у.1, н.у.2 , …, н.у.n},{y1[x], y2[x], …, yn[x]}, x],**

где **д.у.*i*** – уравнения системы дифференциальных уравнений, соответ-ствующие **н.у.*i***–начальные условия, **y*i* [x]** – искомые функции от одной независимой переменной **x** (*i*=1, 2, …, n).

1.14.2. Решение дифференциальных уравнений в численном виде

Многие дифференциальные уравнения не имеют аналитических решений. Однако они могут решаться численными методами. Для численного решения систем дифференциальных уравнений используется функция **NDSolve**:

1) **NDSolve[д.у., y, {x, xmin, xmax}]**

ищет численное решение дифференциального уравнения **д.у.**относительно функции **y**независимой переменной **x**на промежутке от**xmin**до**xmax**.

2) **NDSolve[с.д.у., {y1,y2, …, yn}, {x, xmin, xmax}]**

ищет численное решение системы дифференциальных уравнений с.**д.у.**относительно функций **y*i***независимой переменной **x**на промежутке от**xmin**до**xmax**.

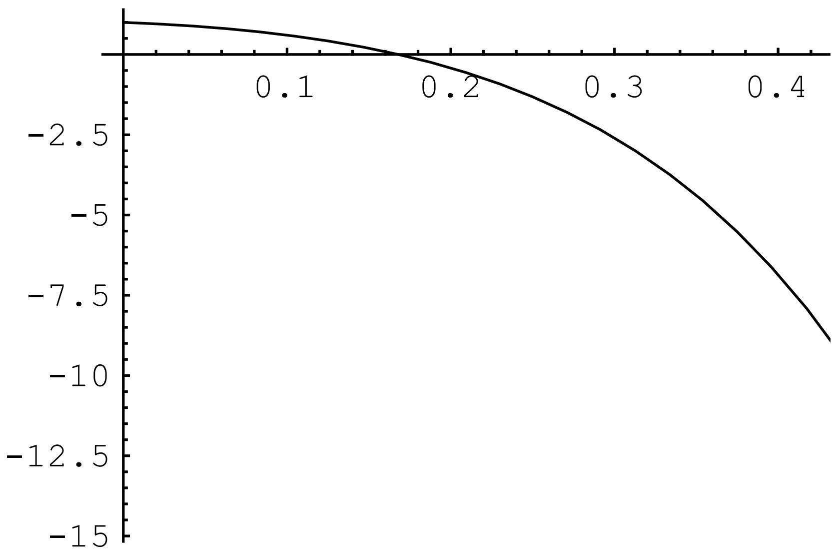
1.14.3. Визуализация частных решений дифференциальныхуравнений

Часто желательно выводить результаты аналитического или численного решения дифференциальных уравнений в графическом виде.

На следующих примерах показано как это делается.

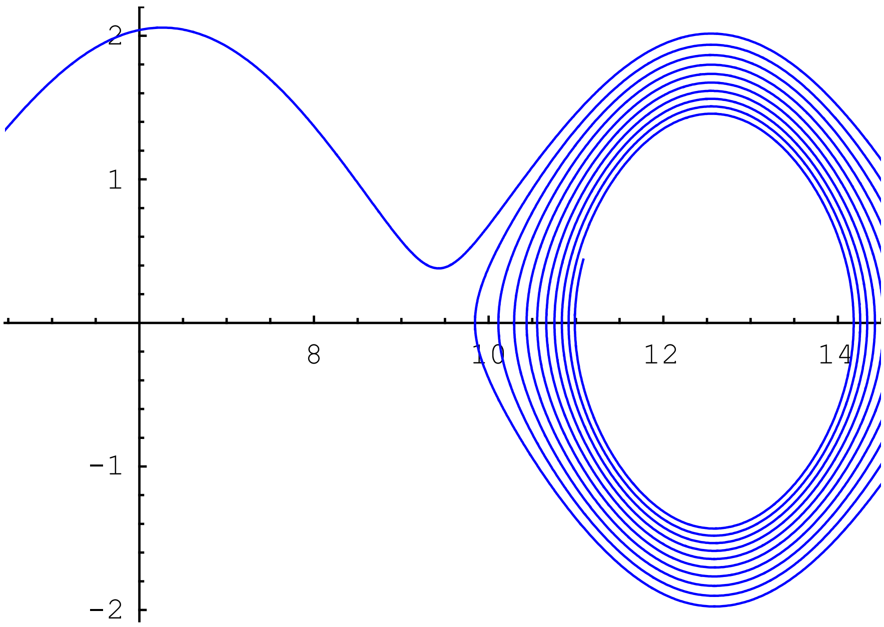
1)**ds1=DSolve[{y''[x] –8 y'[x]+15 y[x]□0,y[0]==1, y'[0]□ –2}, y[x], x]**⇒

{{y[x]→ – (1/2) e^{3x} **(–7+5** e^{2x}**)}}**; **Plot[y[x]/.ds1,{x,0,0.4}]**



2) **ds2=NDSolve[{x'[t]□y[t],y'[t]□-0.01*y[t] – Sin[x[t]],x[0]□0,y[0]□2.1},{x,y},{t,0,100}]** ⇒ **{{x→InterpolatingFunction[{{0., 100.}},<>],y→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>]}}**;

ParametricPlot[{x[t],y[t]}/.ds2,{t,0,100},PlotPoints→10000, PlotStyle→{RGBColor[0,0,1]}]



1.15. Решение оптимизационных задач

1.15.1. Поиск максимального и минимального чисел в списке

Для поиска максимального и минимального значений ряда чисел, входящих в список, в системе **Mathematica** имеются следующие средства:

Max[x1, x2, …] – возвращает наибольшее значение из **x*i***;

Max[{x1, x2, …},{y1, y2, …}, …] – возвращает наибольший элемент из нескольких списков;

Min[x1, x2, …] – возвращает наименьшее значение из **x*i***;

Min[{x1, x2, …},{y1, y2, …}, …] – возвращает наименьший элемент из нескольких списков.

1.15.2. Поиск локального экстремума аналитической функции

Для численного нахождения локального минимума аналитической функции используется функция **FindMinimum[f, {x, x0}]**, которая выполняет поиск локального минимума функции **f**,начиная со значения **x=x0**, и возвращает его значение.

Пример:**FindMinimum[–x*Exp[–2 x], {x, 1}]**⇒**{ – 0.18394, {x→0.5}}**

Аналогично находится локальный максимум аналитической функции с помощью функции **FindMaxmum[f, {x, x0}]**, которая выполняет поиск локального максимума функции **f**,начиная со значения **x=x0**, и возвращает его значение.

Пример:**FindMaxmum[x^3 - 4x^2 – x + 1, {x, –1}]**⇒**{1.0607, {x→– 0.11963}}**

1.15.3. Поиск глобального экстремума аналитической функции

Следующие две функции служат для поиска глобального минимума и максимума аналитически заданной функции:

ConstrainedMin[f, {система неравенств}, {x, y, …}]– ищет глобальный минимум функции**f** в области, определяемой заданной системой неравенств. При этом предполагается, что все переменные **x**, **y**, … неотрицательны.

ConstrainedMax[f, {система неравенств}, {x, y, …}]– ищет глобальный максимум функции**f** в области, определяемой заданной системой неравенств. При этом предполагается, что все переменные **x**, **y**, … неотрицательны.

1.15.4. Решение задач линейного программирования

При решении задач линейного программирования может использоваться функция**LinearProgramming[c, m, b],**которая ищет вектор **x**, минимизирующий величину **c.x**в соответствии с условиями

m.x≥ bи**x≥ 0**.

1.16. Элементы программирования

Система**Mathematica**является диалоговой системой и предназначена, в основном, для решения математических задач без их программирования. Однако при необходимости данная система позволяет программировать решение простых или сложных задач, для которых недостаточно имеющихся в системе вычислительных средств. Основой системы **Mathematica** является проблемно-ориентированный на математические расчеты язык программирования сверхвысокого уровня. По своим возможностям этот язык намного превосходит универсальные языки программирования, такие как **Фортран**, **Бейсик**, **Паскаль** и др.

Входной язык системы **Mathematica**содержит ***операторы, функции и управляющие структуры***. Благодаря этому инструментарию он позволяет легко реализовать все известные типы программирования: функциональное, структурное, объектно-ориентированное, математическое, логическое, рекурсивное и т.д. К примеру, вычисление таких функций, как факториал, в **Mathematica**можно запрограммировать в виде функций пользователя целым рядом способов:

f[n_]:=n!

f[n_]:= Gamma[n–1]

f[n_]:=n*f[n–1]; f[0] = 1; f[1] = 1;

f[n_]:=Product[*i, i,* n]

Все их можно проверить с помощью следующего теста:

f[0], f[1], f[5], f[10]}$\Rightarrow$**{1, 1, 120, 3628800}**

О вопросах программирования в системе **Mathematica** более подробно можно познакомиться в руководствах по данной системе и системе **Help**.

1.17. Пакеты математических расширений

Мощным средством расширения возможностей системы **Mathematica**является подготовка ***пакетов расширений***. Пакеты расширений позволяют создавать новые процедуры и функции и хранить их на диске в виде файлов с расширением **.m**. В сущности, пакеты расширения – это наборы программ на языке программирования системы **Mathematica**, подобранные по определенной тематике.

Структура пакета в минимальном виде выглядит следующим образом:

(* Вводный комментарий *)

BeginPackage["Имя_пакета`"]

Mean::usage = "Имя_функции[Параметры] Текстовый комментарий"

Begin["`Private`"]

Unprotected[Список_имен]

Определения новых функций

End[ ]

Установка атрибутов защиты

EndPackage[ ]

(* Завершающий комментарий *)

В качестве примера рассмотрим*Пакет символьных преобразований тригонометрических функций*"***typack***".

BeginPackage["Программирование в системе Математика тригонометрическихпреобразований`"]

TrigDefine::usage = "Преобразованиепроизведений"

Begin["`Private`"];

pr=Unprotect[Sin,Cos]

Sin/:Sin[x_]*Cos[y_]:=Sin[x+y]/2+Sin[x-y]/2

Sin/:Sin[x_]*Sin[y_]:=Cos[x-y]/2-Cos[x+y]/2

Cos/:Cos[x_]*Cos[y_]:=Cos[x+y]/2+Cos[x-y]/2

```
Sin/:Sin[x_]^n_Integer?Positive:=Expand[(1/2-Cos[2x]/2)*Sin[x]^(n-2)]
Cos/:Cos[x_]^n_Integer?Positive:=Expand[(1/2+Cos[2x]/2)*Cos[x]^(n-2)]
Protect[Evaluate[pr]];
End[ ];
EndPackage[]
```

Рассмотрим примеры – задания на преобразование тригонометрических выражений:

1) упростить выражение $\mathrm{Cos}[3x - \frac{5\pi}{2}]\text{^}2 + \mathrm{Cos}[6x + \frac{3\pi}{2}]\text{^}4$;
2) записать выражение Sin[x]^4 через тригонометрические функции кратных дуг;
3) доказатьтождество: Sin[α]*Sin[x-α]+Sin[x/2-α]^2= =Sin[x/2]^2.

Решение:

```
<<mypack\TrigDefine.m
Cos[3 x - 5π/2]^2 + Cos[6 x + 3π/2]^4 //FullSimplify
```

⇒**1/16 (-1+Cos[6 x]) (-3+4 Cos[12 x]-Cos[24 x])**

Sin[x]^4

⇒**3/8-1/2 Cos[2 x]+1/8 Cos[4 x]**

```
Sin[α] Sin[x - α] + Sin[x/2 - α]^2 == Sin[x/2]^2 //Simplify
```

⇒**True**

2. Лабораторные работы

2.1. Лабораторная работа №1

Тема: «Ознакомление с компьютерной системой Mathematica»

Произвести следующие арифметические операции в системе **Mathematica**:

27+19

46

67-45

22

12 4

8

12*4

48

45/9

5

43/7

$$\frac{43}{7}$$

43./7

6.14286

2^5

32

7^{25}

1341068619663964900807

N[%]

$1.34107\text{x}10^{21}$

N[7^{25}, 20]

$1.3410686196639649008\text{x}10^{21}$

$(1+3)^3$-5(2+4)

34

1/5+3/11

$$\frac{26}{55}$$

N[%]

0.472727

2^{1000}

10715086071862673209484250490600018105614048117055336074437
50388370351051124936122493198378815695858127594672917553146
82518714528569231404359845775746985748039345677748242309854
21074605062371141877954182153046474983581941267398767559165
54394607706291457119647768654216766042983165262438683720566
8069376

100!

93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592
96389521759999322991560894146397615651828625369792082722375
8251185210916864000000000000000000000000

N[π,100]

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944
4592307816406286208998628034825342117068

FactorInteger[123456789123456789]

{{3,2},{7,1},{11,1},{13,1},{19,1},{3607,1},{3803,1},{52579,1}}

Задание №1. Вычислить значение выражения:

$\frac{(7^2-6.35):6.5+9.9}{\left(1.2^{-1}:36+12:0.25-\frac{21}{16}\right):\frac{169}{24}}$.Ответ: 2.48159

Задание №2. Преобразовать (упростить) выражение:

$\frac{4(\sqrt{3}+i)^7}{(\sqrt{3}-i)^4(1.+i)^{12}}$**//FullSimplify**.Ответ: –0.433013+0.25i

2.2. Лабораторная работа №2

Тема: «Работа со списками»

Сформировать списки:**s1=**{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10};

s2= {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10};**s3**= {u,v,x,6,5,13,1,***Cos****(y)*,a,π,***ln***(x)};

s4={2,1,3,3,2,1,1,2,3,1,4,5,1,4};**s5=**{1,2,3};**s6**= {4,5,6};

s7={0,$\frac{\pi}{6}$,$\frac{\pi}{4}$,$\frac{\pi}{3}$,$\frac{\pi}{2}$,π}.

Вывести 1-й, 7-й и последний элементы списка **s1**.Вставить **x** на 8-е место в списке **s1.**Удалить 5-й элемент списка **s1.**

Заместить 3-й элемент списка **s2** на **x**.

Отсортировать список **s3** и **s4** в возрастающем порядке. При этом в **s4** удалить повторяющиеся элементы.

Сложить и умножить списки **s5** и **s6.**

Сформировать список {$©^{1}$,$©^{2}$, $©^{3}$, $©^{4}$,$©^{5}$,$©^{6}$,$©^{7}$, $©^{8}$, $©^{9}$,$©^{10}$} и вычислить значения степеней $©^{i}$ (*i*=1,2,3,…,10).

Вычислить***Sin***[s7].

Сформировать таблицу:

1 □x			
1 □x^2	2 □x^2		
1 □x^3	2 □x^3	3 □x^3	
1 □x^4	2 □x^4	3 □x^4	4 □x^4

Сформировать матрицы:$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d1 & 0 & 0 \\ 0 & d2 & 0 \\ 0 & 0 & d3 \end{pmatrix}$.

Сформировать матрицу: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$и выделить 2-ю строку и элемент $\boldsymbol{a}_{3,4}$.

Сформировать массивы $\boldsymbol{b}1$: b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 и$\boldsymbol{b}2$:$b_{1,1}$, $b_{1,2}$, $b_{1,3}$, $b_{1,4}$

$b_{2,1}$, $b_{2,2}$, $b_{2,3}$, $b_{2,4}$

2.3. Лабораторная работа №3

Тема: «Решение уравнений и систем уравнений»

Задание**.** Решить следующие уравнения с системы уравнений**:**

1. $\sin^2(x) + \cos^2(2x) = 1$
2. $\sin(2x) = 2\cos(x) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
3. $3\sin^2(x) + 5\cos^2(x) = 2\,(1 + \sin(2x))$
4. $\cos^2(2x) + 4\sin^4\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2\cos(2x)$
5. $\sin^4(x) - \cos^4(x) = \cos(4x)$
6. $1 - 2\sin^2(x) = \cos(6x)$
7. $a x^2 + bx + c = 0$
8. $x^3 + \frac{q}{3} x + \frac{p}{27} = 0$
9. $\begin{cases} \frac{x+1}{y-1} = 0 \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$
10. $\begin{cases} (x-y)z^2 = 1 \\ x^2 = 3 \\ y^2 = 3 \end{cases}$
11. $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$
12. $\sqrt[3]{x} + x = 1$
13. $\ln\left(x + \sqrt{a + x^2}\right) = b$
14. $(x+1)^{x+2} = 0$
15. $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2014$
16. $\begin{cases} y^2 - x^3 + 3x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - y^3 + 3y^2 - 2y = 0 \end{cases}$
17. **NSolve**$[x^3 + 2x^2 - 7 == 0, x]$

18.**Roots**$[x^2 + 2\,x + 15 == 0, x]$

19.**Reduce**$[ax^3 + b\,x == 0, x]$

20.**FindRoot [*Sin*[*x*] = =** $x^2, \{x, 0.7\}$**]**

2.4. Лабораторная работа №4

Тема: «Работа с векторами и матрицами»

Задание №1.Даны точки: **A(7,−4,1)**;**B(12,−3,5)**;**C(10,8,−2)**;**D(−1,3,7)**.Найти: 1) периметр Δ **ABC**;2) угол $\angle$ **A** в Δ**ABC**; 3) площадь Δ **ABC**; 4) объем пирамиды **ABCD**.

Задание №2.Сформировать матрицы:

$$\mathbf{m1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & 3 & 11 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{m2}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 & -18 \\ -3 & 3 & 3 & 1 & -20 \\ 4 & -3 & 2 & 1 & 24 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

и вычислить матрицу**m=2m1+3m2.**

Задание №3.Сформировать матрицы:

$$\mathbf{m10}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{m20}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Вычислить определитель матрицы **m10**.

2) Найти произведение матриц **m10** и **m20**.

3) Найти обратную матрицу к матрице **m20**и сделать проверку правильности обращения матрицы.

Задание №4.Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 1x_4 = -26 \\ 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 10 \\ 1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 6x_4 = 19 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 3x_4 = -8 \end{cases}$

1) матричным способом, 2) методом Гаусса, 3) с помощью функции **Solve**.

2.5. Лабораторная работа №5

Тема: «Операции математического анализа»

1. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-8x^2-11x+18}{x^2-3x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2-14x+10}{3x^3+6x^2-3x+2}$;3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-3})$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-3x-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(x)+tg(3x)}{5x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-x)^3}{(x+1)^2-(x+1)^3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos(4x)}{sin^2(7x)}$; 8) $lim_{x\to\pi}\frac{1-sin(\frac{x}{2})}{\pi-x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x-4})^{5x-1}$;10) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{5x}-2^{-7x}}{ln(1+x)+sin^2(x)}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-5x}}{x^2-sin^2(x)}$.

2. Дифференцирование функций одной переменной.

1)найти производные от заданных функций:

а)$y=\frac{2x^3-3x^2+7x+8}{15\sqrt{x^2+2}}$; б)$y=x-ln(e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1})$;

2) найти производные от заданных функций:

а)$y=(arctgx)^{ln(arctgx)}$; б)$y=x^{e^{sin(x)}}$;

3)найти дифференциал***dy***, если

а)$y=\sqrt{x}-(1+x)arctg\sqrt{x}$;б)$y=ln(tg(\frac{x}{2}))-\frac{x}{sin(x)}$;

4) найти производные 3-го порядка:

а)$y=xcos^2x$;б)$y=arctg\frac{\sqrt{2\,ctgx}}{1-ctgx}$.

3. Дифференцирование функций нескольких переменных.

1) Найти частные производные первого порядка от заданных функций:

а) $\boldsymbol{u}=x^2y-\sqrt{z^2+yx+3}$; б) $\boldsymbol{u}=x-\boldsymbol{ln}(x+\sqrt{z^2+y^2})$;

2) Найти полный дифференциал функций:

а) $\boldsymbol{z}=x^3+y^3-3xy$; б) $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{ln}(1+\frac{x}{y})$;

3) Найти частные производные 2-го порядка: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ если

а) $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{arctg}\frac{x}{y}$; б) $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{ln}(x^2+y)$.

2.6. Лабораторная работа №6

Тема: «Интегрирование функций»

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\int \frac{5-7\,\boldsymbol{ln}\,x}{x}\,\boldsymbol{d}x$$

$$\int \frac{x^4+2x^3-x^2-6x-2}{x(x-1)(x-2)}\boldsymbol{d}x$$

$$\int \frac{\boldsymbol{cos}\,x-\boldsymbol{sin}\,x}{(1+\boldsymbol{sin}\,x)^2}\boldsymbol{d}x$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[6]{x})^2}\boldsymbol{d}x$$

$$\int x^2\sqrt{25-x^2}\,\boldsymbol{d}x$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\boldsymbol{d}x$$

$$\int_{-2}^{0} (3+2x)\,\boldsymbol{sin}\frac{\pi x}{8}\,\boldsymbol{d}x$$

$$\int_{0}^{1} x\,\boldsymbol{arctg}\sqrt{3x+1}\,\boldsymbol{d}x$$

3. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+8x+7}\,dx$$

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2-2x-3}\,dx$$

4. Вычислить двойные и тройные интегралы:

1) $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{-y}}^{0}(x+y^3)\,\boldsymbol{dxdy} - \int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{2+y}}^{0}(x^2+y)\boldsymbol{dxdy}$

2) $\int\int_{s}\ (12x^2y^2+16x^3y^3)$***dxdy***;***S***: *x=1*, ***y***=*x*^{2}, ***y***=$\sqrt{x}$. Изобразить область интегрирования S.

3) $\iiint_T\ (3x+2y^2+z)$***dxdydz***, где T: *z=y+3x, y+x=1, x=0, y=0, z=0.*

2.7. Лабораторная работа №7

Тема: «Построение графиков функций»

1. Построить график функции:

$$\boldsymbol{y} = \frac{2x-1}{(x-1)^2}, \qquad x\epsilon[-20{,}20]$$

2. Построить график функции:

y=$\sqrt{|x^2+2x-3|}$, $x\epsilon[-6{,}4]$ и вывести оси координат с названиями “x” и“y”.

3. Построить график функции:***y*** = *x*^{2}- 3|*x*|+2, *x*∈ [−6, 4]

и вывести заголовок рисунка“График функции y = x^2 - 3|x|+2”

4. Построить три графика функций***Sin(x), Sin(2x), Sin(3x)***, для которых *x*∈[0, 2***π***]; 1–й краснымцветом, толщиной – 0.011, 2–й зеленым, толщиной –0.013, 3–й синим, толщиной – 0.015.

5. Построить график функции, заданной параметрически:

$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Cos}(5t) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Sin}(3t) \end{cases}, t \in [0, 2\boldsymbol{\pi}]$ синим цветом.

6. Построить график функции, заданной в полярной системе координат уравнением:***r***= 2(1-***Cos***(φ)), $\varphi \in [0, 2\pi]$ зеленым цветом.

В заданиях 7. и 8. построить точки M_1;M_2;M_3;M_4;M_5; M_6;M_7и ломаную линию $M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7$. Точечный график и график ломаной линии совместить. Размер точек увеличить до 0.017. Точки изобразить красным цветом, ломаные линии – синим цветом:

7. ***x****=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;****y*** *= -1, 3, 2, -4, 1, -2, -3.*

8. ***x****=0.5, 1, 2, 4, 5, 6.5, 8;* ***y*** *= 2, 4, 6, 7, 6.5, 5.5, 3.*

2.8. Лабораторная работа №8

Тема: «Работа с графическими объектами»

1. Совмещение графических объектов.

```
g1=Plot[Cosh[x],{x,-3,3},AspectRatio→Automatic,PlotRange→{0,5},PlotStyle→{Hue[0.55],Thickness[0.012]}]
g2=ParametricPlot[{Cos[t]+Log[Abs[Tan[t/2]]],Sin[t]},{t,0,π},
AspectRatio→Automatic,PlotRange→{{-3,3},Automatic},
Ticks→{{-2,2},{1}},PlotStyle→{Hue[0.85],Thickness[0.012]}]
Show[g1,g2];    Show[GraphicsArray[{g1,g2}]]
```

2. Контурные графики.

```
ContourPlot[x^2 − y^2, {x, −2, 2}, {y, −2, 2}, ColorFunction → Hue],
DensityPlot[x^2 − y^2, {x, −2, 2}, {y, −2, 2}, ColorFunction → Hue].
```

3. Работа с графическими примитивами.

```
p1:=Graphics[Line[{{-1,-1},{1,1}}]]
p2:=Graphics[Circle[{0,0},1],ColorOutput→RGBColor]
p3:=Graphics[Text["Линия и окружность",{0,1.2}]]
Show[p1,p2,p3,Graphics[PointSize[0.05],Point[{-0.5,0.2}]],Axes→True]
```

p=**Table**[**N**[{*Sin*[*2πn/5*],*Cos*[*2πn/5*]}],{*n,6*}]

Show[**Graphics**[**Line**[**p**],**Axes→True**],**AspectRatio→Automatic**]

Show[**Graphics**[**Disk**[{*0,0*},*2*]],**AspectRatio→Automatic**,

DefaultColor→RGBColor[*1,0,0*]]

Show[**Graphics**[**Rectangle**[{*-3,-*

2},{*3,2*}]],**AspectRatio→Automatic**,**DefaultColor→RGBColor[***1,0,1*]]

Show[**Graphics**[**Line**[{{*0,0*},{*1,2*},{*2,1*},{*0,0*}}]],**AspectRatio→Automatic]**

4. Работа с трехмерной графикой.

Plot3D[*Cos*[*x+y*]+*Sin*[*x-y*],{*x,0,2π*},{*y,0,2π*}]. Изобразить поверхность.

$\begin{cases} x = t\cdot cost; \\ y = t\cdot sint; t\in[0;10\pi]. \\ z = 10\sqrt{t}; \end{cases}$ Изобразить пространственную кривую.

2.9. Лабораторная работа №9

Тема: «Решение дифференциальных уравнений»

Задание №1.Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y' + 2\frac{y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$; 2) $y'+xy=x^3y^3$;3) $x^3y''+x^2y'=1$.

Задание №2.Найти частные решения дифференциальных уравнений:

1) $(1+x^2)y'+y=arctg(x)$, $y(0)=1$; 2) $xy'-y = x^2cos(x)$, $y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$. Построить графики.

Задание №3. Найти частное решение дифференциального уравнения:

$y''-8y'+15y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.Построить график решения.

Задание №4.Найти частное решение системы дифференциальных уравнений: $\begin{cases} 5\dot{x} - 2\dot{y} = y - 4x + t, \quad x(0) = 0, \\ \dot{x} + \dot{y} = 8x - 3y + 5t^2, y(0) = 1. \end{cases}$

Построить график решения как кривой, заданной параметрически.

Задание №5. Найти приближенное решение дифференциального уравнения:

$$y''-0.5x^2-y'+2y=0.365x^2,\ y(0)=0.365,\ y'(0)=1.536$$

и построить график решения этого уравнения.

Задание №6.Найти приближенное решение дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x} = y; & x_0 = 0; \\ \dot{y} = -0.01y - \sin(x); & y_0 = 2.1; \end{cases} t_0 = 0; \quad t \in [0;100].$$

Построить график плоской кривой, заданной параметрически.

Задание №7:Найти приближенное решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -3(x-y); & x_0 = 0; \\ \dot{y} = -x \cdot z + 26x - y; & y_0 = 1; \\ \dot{z} = x \cdot y - z; & z_0 = 0; \end{cases} t_0 = 0; \quad t \in [0;20].$$

Построить график пространственной кривой, заданной параметрически.

2.10. Лабораторная работа №10

Тема: «Решение оптимизационных задач»

Задания:Программным способом найти наименьший и наибольший корень уравнения $f(x) = x^5+x^4-27x^3-x^2+146x-120=0$.

Построить график функции $f(x)$.

1) Найти экстремумы функции $f(x) = 12x^5-405x^4-20x^3+4380x^2-7200x+1$.

Построить график функции$f(x)$.

2) Найти:

   а) минимум функции $z = x^2+xy+y^2-7x+3y+5$;

   б) максимум функции $z = -x^2-xy-y^2+3x-2y+1$.

3) Пример: найти минимум функции $z=-3x-2y$

с ограничениями D: $x-y\geq-2;\ -3x+2y\geq-6;\ 2x+y\geq2;\ -y\geq-3;\ x\geq0;\ y\geq0$.

Построить область D.

Решение:

$z= -3x-2y$

c= {*−3, −2*}

m= {{*1, −1*}, {*−3, 2*}, {*2, 1*}, {*0, −1*}}

b ={*−2, −6, 2, −3*}

LinearProgramming[c, m, b]

x0=*4;* y0=*3;* z0=*−3x0−2y0=−18*

Другойспособ:

ConstrainedMin[*−3x−2y*, {*x−y≥−2, −3x+2y≥−6, 2x+y≥2, −y≥−3*}, {*x, y*}]

{−18, {x→4, y→3}}

Задание:

Найти минимум функции ***z = 6x+2y*** с ограничениями

D: ***4x−y≥0; 2x+y≥3; −x−2y≥−14; −x+y≥0; −x≥−6*** первым и вторым способом.

2.11. Лабораторная работа №11

Тема: «Моделирование полета частицы»

Задание.На частицу удобренийв момент ее схода с центробежного дискадействует лишь сила тяжести.Движение частицы относительно системы координат **Oxy** описывается системой дифференциальных уравнений:$\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = -g$,(**g**−ускорение свободного падения)с начальными условиями: $\dot{x}(0)=v0\cdot\cos\alpha$,$\dot{y}(0)=v0\cdot\sin\alpha$, **x(0)=0,y(0)=0**.

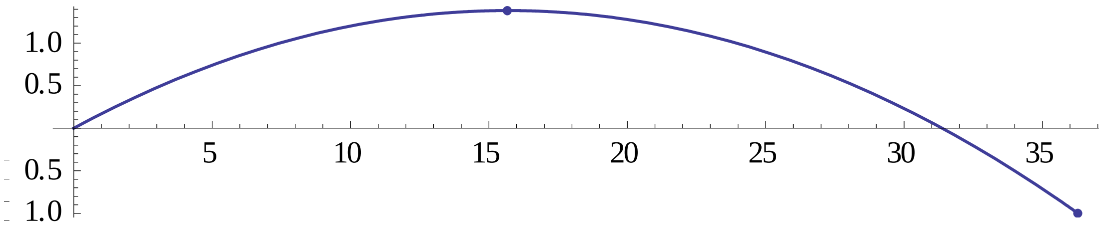
Найти закон движения частицы:**x=x(t)**,**y=y(t)**, если она вылетает под углом **α**к горизонту с начальной скоростью **v0**. Определить момент времени**tm**и высоту **hm** максимального подъема частицы,моментвремени **tk**паденият частицы на землю и максимальнуюдальность полета частицы**sk** - расстояние по оси **Ox** от начала полета частицыдо ее падения на землю с высоты **h0**. В качестве исходных данных принять: **g**= 9.81, **v0** = 30, **h0**=1,***α*** = 10°. Изобразить траекторию полета частицы.

Решение:**g= 9.81; v0 = 30; h0 =** 1; **α = 10.*Degree;ds** =**DSolve[{x′′[t] == 0, y′′[t] ==−g, x′[0] == v0*Cos**[α], **y′[0] == v0*Sin**[α], **x[0] == 0, y[0] == 0**},**{x[t],y[t]},t];xt[t]=x[t] /. First[First[ds]];yt[t]=y[t] /. Last[First[ds]];y1=D[yt[t],t]; s = Solve[y1 == 0, x];tm = t /.First[s];xm= xt[t] /. t →tm; ym= yt[t] /. t → tm; hm = ym; yk=−h0; s1=Solve[yt[t]==yk,t]; tk = t/.First[Last[s1]]; sk=xk =ReplaceAll[xt[t],t→tk]**

p1=ParametricPlot[Evaluate[{xt[t],yt[t]},{t,0,tk}], AspectRatio→0.2];

p2= ListPlot[{{xm, ym},{xk, yk}},PlotStyle→{RGBColor[1,0,0],PointSize[0.02]}];

Show[p1,p2]



2.12. Лабораторная работа №12

Тема: «Составление простейших программ»

Тестирование простейших программ вычисления сумм и произведений:

s=0; n=20; For[i=1, i ≤n, s=s+$\frac{1}{i}$;i++];s

s = 0; Do[s+=1/i, {i, n}]; s

s=0; Do[s=s+i, {i,1000}]; s

n=5; p=1; For[i=1, i≤n, p=p*i, i++]; p

f[n_]:=n!

{f[0], f[1], f[5], f[10]}

f[**n_**]:=**Gamma**[**n+1**]

{*f*[0], *f*[1], *f* [5], *f*[10]}

f[**n_**]:=**n* f**[**n-1**];**f**[**0**]=**1**;**f**[**1**]=**1**;

{f[0], f [1], f [5], f [10]}

f[n_]:= $\prod_{i=1}^{n} i$

{**f[0]**,**f**[1],**f**[5],**f**[10]}

Тестирование программ, реализующих задачу вычисления числа“счастливых” билетов:

s=0; si=0; sk=0;

Do[**si=i1+i2+i3; sk=k1+k2+k3**; **If**[**si==sk,s=s+1**],
{**i1,0,9**},{**i2,0,9**},{**i3,0,9**},{**k1,0,9**},{**k2,0,9**},{**k3,0,9**}]; **s**

(s=0; **Do**[**si=i1+i2+i3; sk= k1+k2+k3**; **If**[**si==sk,s=s+1**],
{**i1,0,9**},{**i2,0,9**},{**i3,0,9**},{**k1,0,9**},{**k2,0,9**},{**k3,0,9**}]; **s**)//**Timing**

(**s=0;For**[**i1=0, i1≤9, i1=i1+1**, **For**[**i2=0, i2≤9, i2=i2+1**, **For**[**i3=0, i3≤9,i3=i3+1**, **For**[**k1=0,k1≤9,k1=k1+1**, **For**[**k2=0,k2≤9, k2=k2+1**, **For**[**k3=0, k3≤9, k3=k3+1, si=i1+i2+i3**; **sk=k1+k2+k3**; **If**[**si==sk, s=s+1**]]]]]]]; **s**)//**Timing**

2.13. Лабораторная работа №13

Тема: «Разложение функций в ряд Маклорена»

Задача. Разложить функцию$\boldsymbol{f(x)}= \boldsymbol{e}^{2x}$в ряд Маклорена и построить графики данной функции и аппроксимирующих функций.Сопоставить полученные графики.

Решение:

f[x_]:= ©^{2x}

{f[0],f '[x],f '[**0**],**D[f[x]**,{**x,2**}],**D[f** [**x**],{**x,5**}],**f''''**[**0**]**}**

p1=**Plot**[**f**[**x**],{**x,0,2**},**PlotStyle**→{**RGBColor**[**1,0,0**]}]

s[x] := f[0]+ $\frac{f^{`}(0)x}{1!}+\frac{f^{``}(0)x^2}{2!}+\frac{f^{```}(0)x^3}{3!}+\frac{f^{````}(0)x^4}{4!}+\frac{f^{`````}(0)x^5}{5!}$

p2=Plot[s[x],{x,0,2.5},PlotStyle→{RGBColor[0,1,0]}]

q = Collect[Series[f[x],{x,0,5}],x]

p3=Plot[**q,{x,0,3}**,**PlotStyle→{RGBColor[0,0,1]}]**

Show[**p1,p2,p3**]

Задание:Выполнить условия задачи, рассмотренной выше, для функций:

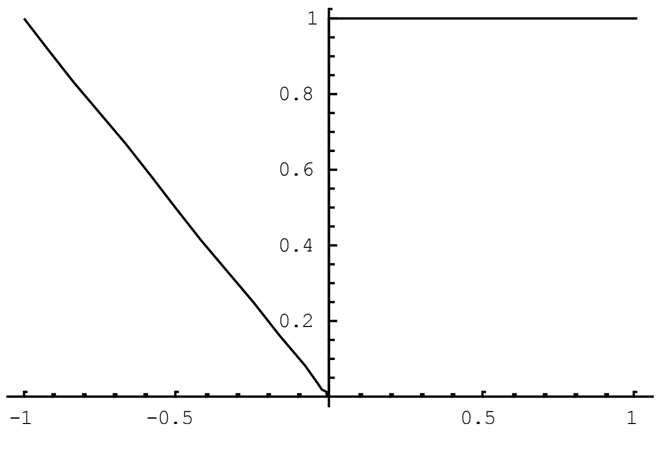
1) **f1[x_]:= Cos** [**2x-**$\frac{\pi}{4}$**]**,
2) **f2[x_]:= Sin**[**x**]^2,
3) **f3[x_]:= x©**^{2x} ,
4) **f4[x_]:= Log**[**1+©**$^{-2x}$] .

2.14. Лабораторная работа №14

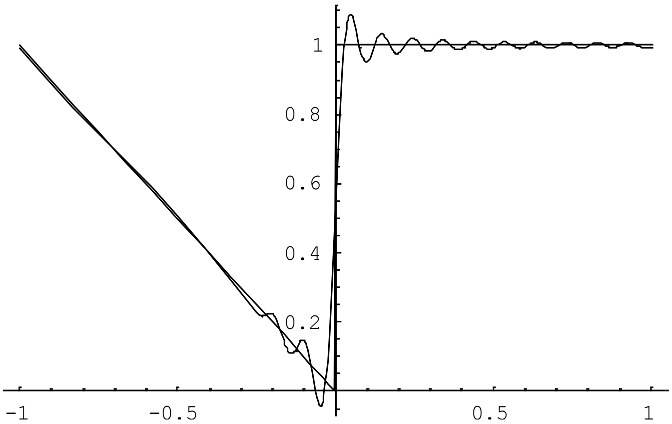
Тема: «Разложение функций в ряд Фурье»

Пример. Разложить функцию*f*(*x*) = $\begin{cases} -x, & x \in [-1,0], \\ 1, & x \in (0,1] \end{cases}$ в ряд Фурье; построить графики данной функции и аппроксимирующей функции. Сопоставить полученные графики.

f[**x_**] := **If**[**0<x≤1,1,-x**]; **g1= Plot[f[x],{x,-1,1}]**



p = 2; a0 =$\frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f[x]dx$;a[n_] =$\frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f[x]\ Cos[\frac{2\ \pi\ n\ x}{p}]dx$; b[n_] =$\frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f[x]\ Sin[\frac{2\ \pi\ n\ x}{p}]dx$;s[x_] = $\frac{a0}{2}$ +$\sum_{n=1}^{10}\left(a[n]\ Cos[\frac{2\ n\ \pi\ x}{p}] + b[n]\ Sin[\frac{2\ n\ \pi\ x}{p}]\right)$; g2= Plot[s[x],{x, -p/2, p/2}];Show[g1,g2]



Задание. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-3,0], \\ 3-x, & \in (0,3] \end{cases}$ в ряд Фурье и построить графики данной функции и аппроксимирующей ее функции.

2.15. Лабораторная работа №15

Тема: «Анимация»

1) С помощью оператора **Do и Table** изобразить анимацию графика функциис изменением оттенка графика с красного до желтого **(h0** - начальный оттенок **dh - шаг)** и с изменениемтолщины линии(**t0** - начальная толщина**, dt –** шаг изменения толщины линии).

$$f1[x\_,a\_] := \frac{a * Sin[x]}{x}$$

```
Do[Plot[f1[x,a],{x,−15,15},PlotRange → {−0.25,1},Ticks → None,
PlotStyle → {{Hue[h0 + dh * a],Thickness[t0 + dt * a]}},Axes
            → None],{a,0.1,1.,0.1}]
Table[Plot[f1[x,a],{x,−15,15},PlotRange → {−0.25,1},Ticks
            → None,PlotStyle
            → {{Hue[h0 + dh * a],Thickness[t0 + dt * a]}},Axes
            → None],{a,0.1,1.,0.1}]
```

2) С помощью оператора **Do** изобразить колебания маятника**.** Все линии и точки изобразитькрасным цветом**.** Принять за **r -** длину маятника**, a1 и a2 -** соответственно угловыеамплитуды колебаний**, da -** шаг изменения угла.

```
Do[Show[Graphics[{Circle[{0,0}, 0.05], Disk[{r * Cos[t], r
          * Sin[t]}, 0.1], Line[{{0,0}, {r * Cos[t], r * Sin[t]}}]}],
          PlotRange → {{−π, π}, {−π, π}},
AspectRatio → Automatic, DefaultColor → RGBColor[1,0,0]],     {i, −1, 1, 2},
```

$$\{t, a1 * \frac{1-i}{2} + a2 * \frac{1+i}{2}, a2 * \frac{1-i}{2} + a1 * \frac{1+i}{2}, -da * i\}]$$

3) Изобразить морфинг вертикального цилиндра в горизонтальный (***np*** - число точек, ***ni*** - число цилиндров, ***hi*** - шаг по ***i***в доляхπ) .

```
Do[ParametricPlot3D[{Cos[i * hi] * Cos[β] + Sin[i * hi] * Sin[α],
          Sin[β], Cos[α]}, {α, 0, 2π}, {β, 0, 2π}, Axes → None, Boxed
          → False, PlotPoints → np, PlotRange
          → {{−1.5, 1.5}, {−1.1, 1.1}, {−1.1, 1.1}}], {i, 0, ni}];
```

4) Изобразить смайлик”Эмоции”.

```
Table[Plot[t * (x^2 − 1) + (1 − t) * (−x^2), {x, −1, 1}, Axes → False, Epilog
→ {Circle[{0, 1}, 3], Disk[{1, 2},.3], Disk[{−1, 2},.3], Line[{{0, 0.6}, {0, 1.6}}]},
PlotRange → {{−3, 4}, {−3, 4}}, AspectRatio → Automatic, PlotStyle
→ {{RGBColor[0.8 + .2
* t, 0,.0], Thickness[0.01]}, {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.015]}}], {t, 0, 1, 0.02}];
```

5) Изобразить качение красного колеса (с морфингом цвета из красного в зеленый) по синейдорожке(**tk** - время движения колеса, **sk** - длина дорожки, **hs** - шаг изменения длины дорожки в доляхπ).

```
Do[ParametricPlot[{{s + Cos[t], Sin[t]}, {t, -1.0}}, {t, 0, 10 Pi}, Axes→False,
AspectRatio→Automatic, PlotRange→ {{-1, 10 Pi}, {-1.1, 2}},  PlotStyle→
{{RGBColor[1 - .02*s, .03*s, .0], Thickness[0.0025]},
{RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.0025]}}], {s,  0, 10 Pi,Pi/6}]
```

2.16. Лабораторная работа №16

Тема: «Стандартные пакеты расширения»

Пакеты расширения **Packages**добавляют в систему **Mathematica**ряд функций, которые отсутствуют в ядре системы. Применение пакетов имеет три особенности:необходимо предварительно объявить загрузку пакета (**Declare**); скорость вычислений для функций пакетов ниже, чем для функций ядра; стандартные пакеты модифицировать нельзя - модификация функций пакетов может нарушить программную совместимость.

1. Пакет алгебраических функций **Algebra**.

С помощью пакета **Algebra**можно решать различные алгебраические задачи. Например, решать неравенства.Для доступа ко всем функциям пакета используется функция: **<<Algebra` .**

Задания. Решить неравенство: $x(x^2-5)(x^3-6)>0$. Решение:

<<Algebra`AlgebraicInequalities`InequalitySolve$[x\,(x^2-5)(x^2-6)>0,x]$

Ответ: $-\sqrt{6}<x<-\sqrt{5}||0<x<\sqrt{5}||x>\sqrt{6}$

Решить неравенство: $x*(x^2-1)(x^3-2)>1$. Решение:

Needs["**Algebra`InequalitySolve`**"]

SemialgebraicComponents[{$x(x^2-1)(x^3-2)>1\},x$**].** Ответ: $\{-3,3\}$.

2. <u>Пакет вычислительных функций **Calculus**</u>**.**

С помощью пакета **Calculus**можно решать различные нестандартные задачи. Например, найти градиент скалярной функции $u=5x^2y^3z^4$.

Решение:**<<Calculus`VectorAnalysis`**

3. <u>Пакетчисленныхрасчетов**NumericalMath**</u>**.**

<<NumericalMath`ListIntegrate`

t=Table[n^2+3 n+2,{n,1,12}] ⇒ **{6,12,20,30,42,56,72,90,110,132,156,182}**

ListIntegrate[t,1] ⇒**{4873/6}**

$\int_1^{12}(n^2+3n+2)\,dn$ Ответ: 4873/6

4. <u>Пакет геометрических расчетов **Geometry**</u>**.**

Содержит ряд функций, полезных при геометрических расчетах – построение многоугольников на плоскости и полиэдров в пространстве, вращение фигур в пространстве и т.п. Например:

```
In[21]:= Grad[5 x^2 y^3 z^4, Cartesian[x, y, z]]
```

Out[21]= $\{10\, x\, y^3\, z^4,\ 15\, x^2\, y^2\, z^4,\ 20\, x^2\, y^3\, z^3\}$

```
In[16]:= << Geometry`Rotations`
```

In[17]:= `MatrixForm[RotationMatrix2D[N[`$\frac{\pi}{4}$`]]]`

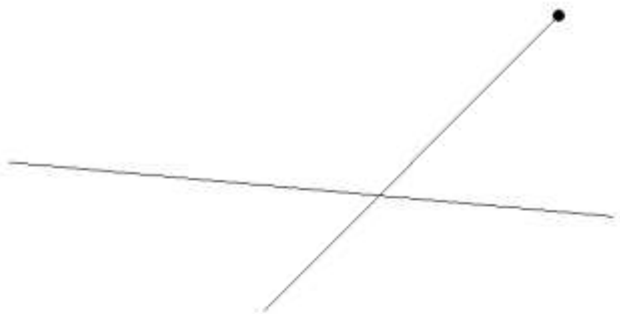
Out[17]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.707107 & 0.707107 \\ -0.707107 & 0.707107 \end{pmatrix}$$

```
In[18]:= {a, b} = {{0., 0.}, {1., 1.}}

Out[18]=
         {{0., 0.}, {1., 1.}}
```

In[19]:= `{a1, b1} = {Rotate2D[a, N[`$\frac{\pi}{3}$`], {0., 1.}], Rotate2D[b, N[`$\frac{\pi}{3}$`], {0.5, 0.5}]}`

```
Out[19]=
         {{-0.866025, 0.5}, {1.18301, 0.316987}}

In[21]:= Show[Graphics[{Line[{a, b}], Line[{a1, b1}], {PointSize[.02], Point[{1, 1}]}}],
          AspectRatio → Automatic]
```



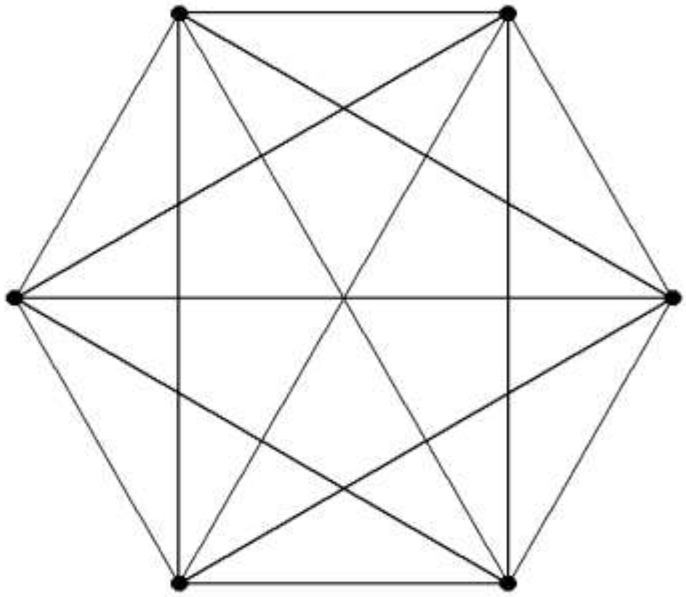
```
Out[21]=
         - Graphics -
```

5. <u>Пакет дискретной математики **DiscreteMath**</u>.

Задает набор функций дискретной математики(комбинаторика, теория графов).

Например:

```
In[11]:= << DiscreteMath`Combinatorica`

In[12]:= ShowGraph[CompleteGraph[6]];
```



```
In[14]:= TableForm[Edges[CompleteGraph[6]]]
```

1	2
1	3
1	4
1	5
1	6
2	3
2	4
2	5
2	6
3	4
3	5
3	6
4	5
4	6
5	6

6. Пакет численных расчетов **NumericalMath.**

Применяется при численном решении систем уравнений, приближенном интегрировании функций и решении дифференциальных уравнений и т.д.

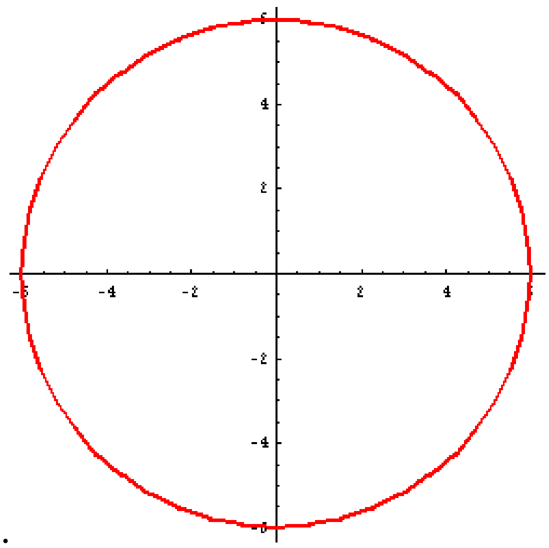
Пример численного интегрирования функции, заданной таблично.

```
In[22]:= << NumericalMath`ListIntegrate`

In[23]:= t = Table[n^2, {n, 0, 10}]

Out[23]=
         {0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

In[28]:= ListIntegrate[t, 1]

Out[28]=
         1000
         ----
          3

In[29]:= ListIntegrate[t, 1.]

Out[29]=
         333.333

In[30]:= ListIntegrate[t, .1]

Out[30]=
         33.3333

In[32]:= ListIntegrate[t, 2.]

Out[32]=
         666.667
```

7. Графический Пакет **Graphics**.

Применяется для создания анимации, более полного использования цвета и оттенков, построения стрелок, построения графиков функций, заданных неявно, для изображения трехмерных графических объектов и

```
<< Graphics`ImplicitPlot`

ImplicitPlot[x^2 + y^2 == 36, {x, -6, 6},
 PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[.01]}]
```



др.

8. <u>Пакет статистических расчетов **Statistics**</u>**.**

Этот пакет применяется при работе с массивами данных, для построения гистограмм, нахождения математического ожидания и дисперсии, статистических распределений, для решения задач линейной регрессии и других задач математической статистики.

Пример нахождения доверительного интервала для набора данных:

a: 3,7; 8,3; 1,2; 3,7; 4,5; 0,6; 5,8; 2,4; 3,7; 5,0.

Решение:

<<Statistics`ConfidenceIntervals`

a={3.7,8.3,1.2,3.7,4.5,0.6,5.8,2.4,3.7,5.0}

mm=MeanCI[a]⇒{2.28883,5.49117}

amin=First[mm]⇒{2.28883}

amax=Last[mm]⇒{5.49117}

s1=Solve[{m0-δ□amin,m0+δ□amax},{m0,δ}] ⇒
{{**m0→3.89,δ→1.60117**}}

mediana=m0/.First[s1]⇒{**3.89**}

rasbros=δ/.First[s1]⇒{**1.60117**}

9. <u>Пакетлинейнаяалгебра**LinearAlgebra**</u>**.**

Применение пакета полезно при решении сложных задач линейной алгебры – решение систем линейных уравнений, решение неравенств, операции с векторами и матрицами, ортогонализация и нормализация матриц и т.п.

3. Контрольные задания

Задание №1. Решить уравнения:

1) $x^3-4x^2+5x-6;$ 2) $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2003;$ $Sin^2x+Cos^2 2x=1;$

4) $(x+1)^{x+2}=0;$ 5) $\ln(x+\sqrt{a+x^2})=b$ **.**

Задание №2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 5x+8y-z=7 \\ x+2y+3z=1 \\ 2x-3y+2z=9 \end{cases}$

Задание №3. Заданы координаты вершин пирамиды $ABCD: A(1,2,1); B(-1,5,1); C(-1,2,7); D(1,5,9)$. Найти координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, угол между векторами $\overline{AB}, \overline{AC}$, площадь грани ABC и объем пирамиды.

Задание №4. Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-3x-4}, x_0=2,-1,\infty.$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Sinx-Sina}{x-a}$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty}Cos^n(\dfrac{x}{\sqrt{n}})$.

Задание №5.Найти производные от следующих функций:

1) $(3x-4\sqrt[3]{x})^2$, 2) $\dfrac{4x+7tgx}{\sqrt{1+9x}}$, 3) $Cos(3x)e^x$, 4) $\ln(arctg2x)$.

Задание №6. Вычислить следующие интегралы:

1) $\int(3x^2-\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}+2)\,dx$, 2) $\int Cos^3x\,Sinx\,dx$, 3) $\int x\ln 2x\,dx$

Задание №7. Построить кривые L1 и L2, ограничивающие область D, и вычислить площадь этой области. $L1: y(x)=f_1(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+1;$ $L2: y(x)=f_2(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x+6.$

Задание №8. Найти экстремум функции двух переменных

$z=f(x,y)$ $z=x^2+xy+y^2-3x-6y-2$

Задание №9. Используя понятие двойного интеграла, вычислить координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной заданными линиями L1 и L2. $L1: x^2+4y^2=1,$ $L2: -x+2y=1.$

Задание №10.Найти частные решения дифференциальных уравнений:

1) $y'+2xy=3x^2e^{-x^2}, y(0)=0$, 2) $y''-7y'+10y=0, y(0)=2, y'(0)==-1$,

удовлетворяющих заданным начальным условиям.

Список рекомендованной литературы

1. Акритас А. Основы компьютерной алгебры / пер. с англ. Е. В. Панкратьева. –М.: Мир, 1994. – 544 с.

2. Капустина Т.В. Компьютерная система Mathematica 3.0 для пользователей. – М.: Солон-Р, 1999. – 240 с.

3. Дьяконов В. П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М.: Нолидж, 2001. – 328 с

4. Дьяконов В. П. Mathematica 4: учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. –656 с.

5. Дьяконов В. П.Mathematica5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления.– М.: ДМК_Пресс, 2008. – 574 с.